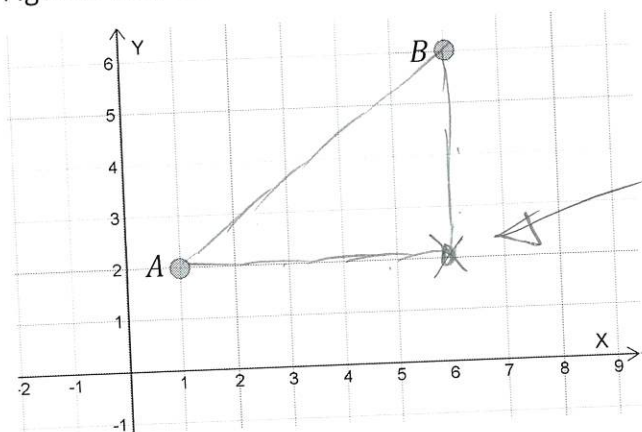


FACIT

3.7 Koordinatgeometri och avståndsformeln

Del 1 – Utan digitala hjälpmedel

1. Figuren visar ett koordinatsystem med de två punkterna A och B markerade.



Rita en tredje punkt och bilda en rätvinklig triangel där AB är hyp.

(2/0/0)

Bestäm avståndet mellan punkterna A och B.

Skilnad i x-led: 5
Skilnad i y-led: 4

Avståndet ges av Pyth. sats \Rightarrow

$$5^2 + 4^2 = d^2 \Rightarrow d = \sqrt{41}$$

2. Bestäm avståndet mellan punkterna...

(2/0/0)

- a) $(-3, 2)$ och $(7, -3)$.

Svara exakt!

Skilnad i x-led: $7 - (-3) = 10$

Skilnad i y-led: $-3 - 2 = -5$

$$\text{Avstånd: } d = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125}$$

- b) $(6, -3)$ och $(5, -5)$.

Svara exakt!

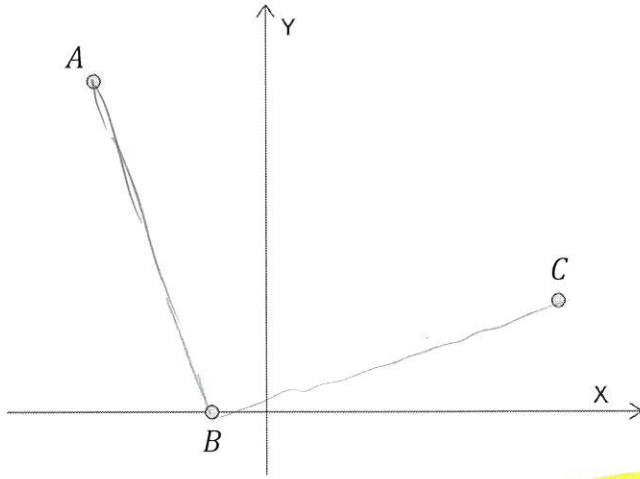
Skilnad i x-led: $5 - 6 = -1$

Skilnad i y-led: $-5 - (-3) = -2$

$$\text{Avstånd: } d = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

(2/0/0)

3. En triangel har sina hörn i punkterna $A = (-3,6)$, $B = (-1,0)$ och $C = (5,2)$



a) Visa att triangeln är likbent

(2/1/0)

$$AB: \begin{array}{l} x\text{-skillnad: } 2 \\ y\text{-skillnad: } 6 \end{array} \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

$$BC: \begin{array}{l} x\text{-skillnad: } 6 \\ y\text{-skillnad: } 2 \end{array} \Rightarrow BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

TVå sidor lika \Rightarrow Triangeln likbent vsv.

b) Visa att triangeln är rätvinklig

(0/2/0)

Om den är rätvinklig kan Pyth. sats användas för att bestämma tredje sidan:

$$AC: \begin{array}{l} x\text{-skillnad: } 8 \\ y\text{-skillnad: } 4 \end{array} \Rightarrow AC = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$$

$$\text{Pyth. sats på } \sqrt{40} \text{ och } \sqrt{40} \Rightarrow AC = \sqrt{(\sqrt{40})^2 + (\sqrt{40})^2} = \sqrt{40+40} = \sqrt{80}$$

Pyth. sats gav hypotenusans längd \Rightarrow Rätvinklig

4. För de båda punkterna $A = (a, 2a)$ och $B = (2a, 4a)$ gäller att a är en positiv konstant

Avståndet mellan punkterna A och B är 10 längdenheter.

Bestäm koordinaterna för punkten A . Svara exakt!

(0/2/0)

$$x\text{-skillnad: } 2a - a = a$$

$$y\text{-skillnad: } 4a - 2a = 2a$$

$$\text{Avstånd} = 10 \Rightarrow \sqrt{a^2 + (2a)^2} = 10 \quad \left[\begin{array}{l} \text{kvadrera} \\ \text{bort } \sqrt{} \end{array} \right]$$

$$a^2 + (2a)^2 = 100$$

$$a^2 + 4a^2 = 100$$

$$5a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 20$$

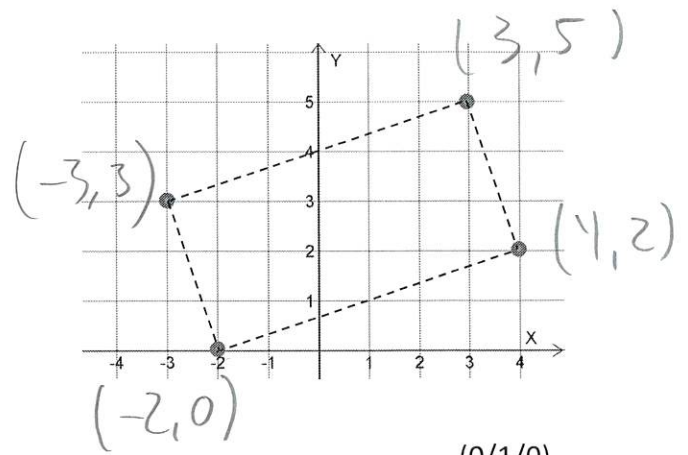
$$a = \sqrt{20}$$

Punkten A : $(\sqrt{20}, 2\sqrt{20})$

5. Till höger visas fyra punkter i ett koordinatsystem. Dessa bildar tillsammans en rektangel.

Diagonalerna i en rektangel är lika långa. Längden hos en av diagonalerna hos rektangeln till höger kan skrivas på formen

$$d = \sqrt{\text{Heltal}}$$



- a) Bestäm talet d .

Svara exakt!

$d =$ längden av en diagonal \Rightarrow Avståndet mellan $(-2, 0)$ och $(3, 5)$

x-skilnad: 5
y-skilnad: 5 $\Rightarrow d = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$ (kan också fås via de andra 2 hörnen)

(0/1/0)

- b) Rektangelns area är ett heltal. Bestäm detta heltal.

Basen = Avståndet mellan $(-2, 0)$ och $(4, 2)$

$$\Rightarrow \text{Basen} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

Höjden = Avståndet mellan $(3, 5)$ och $(4, 2)$

$$\Rightarrow \text{Höjden} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Area} = \text{Basen} \cdot \text{Höjden} = \sqrt{40} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20 \text{ ae}$$

(Dela upp som två $\sqrt{\quad}$)

(0/2/0)

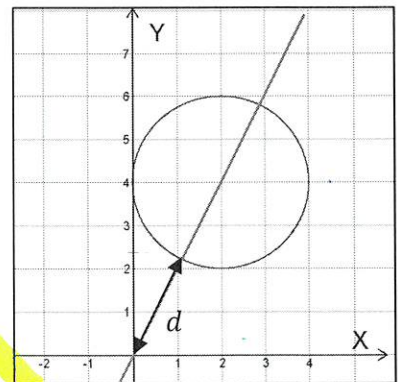
6. I koordinatsystemet till höger har en cirkel med medelpunkten $(2, 4)$ ritats.

Cirkeln går igenom punkten $(0, 4)$.

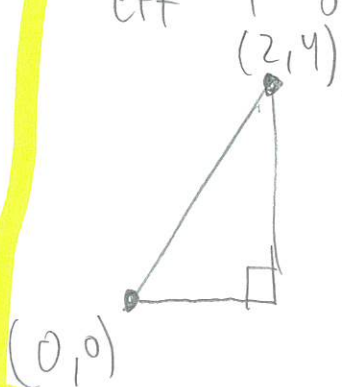
I samma koordinatsystem har även linjen $y = 2x$ ritats.

Visa att sträckan $d = \sqrt{20} - 2$

(0/3/0)



Skapas en rätvinklig triangel med ett hörn i medelpunkten och ett i origo fås:



$$\text{Hypotenusan} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

\Rightarrow Hypotenusan består av 2 delar: En cirkelradie och d

$$\Rightarrow \sqrt{20} = 2 + d \Rightarrow d = \sqrt{20} - 2 \text{ vsv.}$$

7. Avståndet mellan de två punkterna $A = (2,5)$ och $B = (a, 2-a)$ är 7 längdenheter. Bestäm det positiva talet a . Svara exakt!

(0/2/0)

x-skilnad: $a-2$

y-skilnad: $2-a-5 = -a-3$

Avstånd = 7 $\Rightarrow \sqrt{(a-2)^2 + (-a-3)^2} = 7$ [kvadrera bort $\sqrt{\quad}$]

$(a-2)^2 + (-a-3)^2 = 49$ [utveckla $(\quad)^2$]

$a^2 - 4a + 4 + a^2 + 6a + 9 = 49$ [Gör ekv. pq-ränlig]

$2a^2 + 2a - 36 = 0$

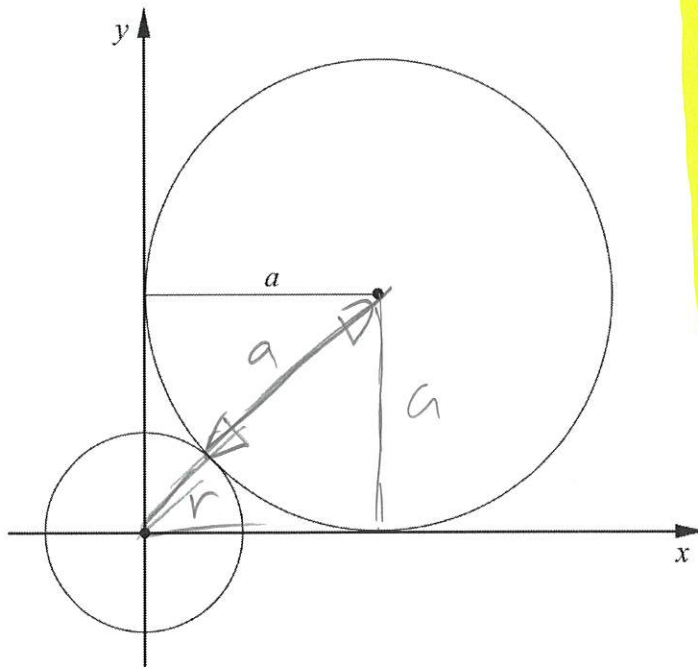
$a^2 + a - 18 = 0$ [pq]

$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 18} = \sqrt{\frac{1}{4} + 18} = \sqrt{\frac{73}{4}}$

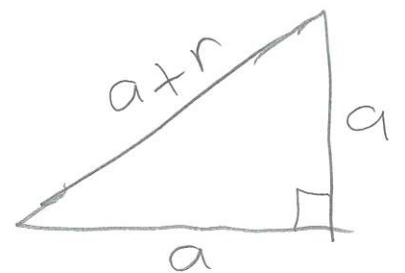
$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{73}}{2}$

8. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

En cirkel med radien a tangerar de positiva koordinataxlarna. Den tangerar även en mindre cirkel som har mittpunkten i origo. Se figur.



Drag radien rakt ned i stora cirkeln.
Drag ett streck från stora medelpunkten till origo. Då fås



Visa att den mindre cirkelns radi är $a(\sqrt{2}-1)$ längdenheter.

(0/0/3)

Pyth. $\Rightarrow a^2 + a^2 = (a+r)^2 \Rightarrow 2a^2 = (a+r)^2$

[$\sqrt{\quad}$ på båda sidor] $\Rightarrow \sqrt{2a^2} = \sqrt{(a+r)^2} \Rightarrow$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} = (a+r) \Rightarrow [\sqrt{a^2} = a] \Rightarrow \sqrt{2}a = a+r$

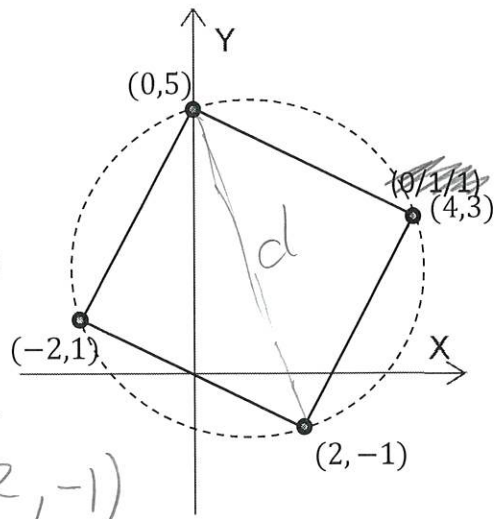
\Rightarrow [Lös ut r] $\Rightarrow r = \sqrt{2}a - a =$ [Bryt ut a]

$= a \cdot (\sqrt{2} - 1)$ osv.

9. Figuren visar ett koordinatsystem med en cirkel i vilken en kvadrat skrivits in så att kvadratens hörn ligger på cirkelns rand.

Bestäm cirkelns radie. Svara exakt!

(0/1/1)



Mellan två motstående hörn på kvadraten är sträckan en diameter, dvs 2 radier.

Avståndet mellan $(0,5)$ och $(2,-1)$

$$d = \sqrt{(2)^2 + (6)^2} = \sqrt{40}$$

Om $d = \sqrt{40}$ blir en radie,

$$r = \frac{\sqrt{40}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}} = \sqrt{10}$$

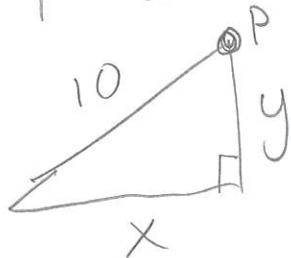
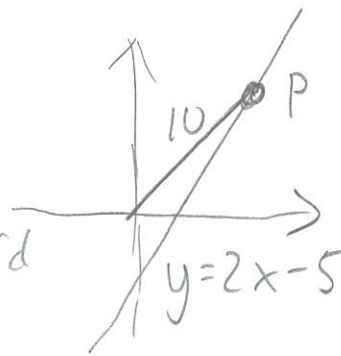
10. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

På linjen $y = 2x - 5$ ligger en punkt P i första kvadranten. Avståndet mellan punkten P och origo är 10 längdenheter. Bestäm x -koordinaten för punkten P . Svara exakt.

(0/0/3)

Skiss av den givna informationen:

Dras en linje rakt ned vid punkten P för:



Eftersom P ligger på linjen gäller att $y = 2x - 5 \Rightarrow$

$$\text{Pyth.} \Rightarrow x^2 + (2x-5)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 100$$

$$\Rightarrow \text{[\"pq-vänlig\"]} \Rightarrow x^2 - 4x - 15 = 0 \Rightarrow \text{[\"pq\"]}$$

$$\triangle +2 \quad \underline{2} \cdot \underline{2} + \underline{15} = 19 \Rightarrow \sqrt{19}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{19}$$

neg. inte aktuell pga första kvadranten $\rightarrow (+)$

FACIT

Del 2 – Med digitala hjälpmedel

D1. Bestäm avståndet mellan punkterna $(-16, 4)$ och $(6, 19)$.

(1/0/0)

Svara med 1 decimalers noggrannhet!

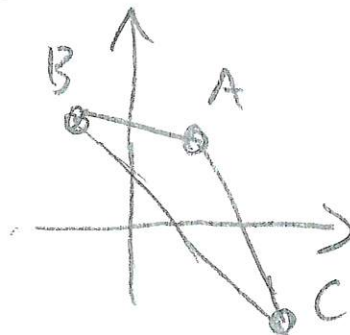
Avstånd (A, B)
eller
sträcka $(A, B) \Rightarrow d \approx 26,6 \text{ le}$

D2. En triangel har sina hörn i punkterna $(3, 5)$ och $(-2, 7)$ och $(7, -3)$.

a) Skissa triangelns utseende.

(1/0/0)

Skriivs punkterna
in fäs



b) Bestäm triangelns omkrets.

(3/0/0)

Svara med 2 decimalers noggrannhet!

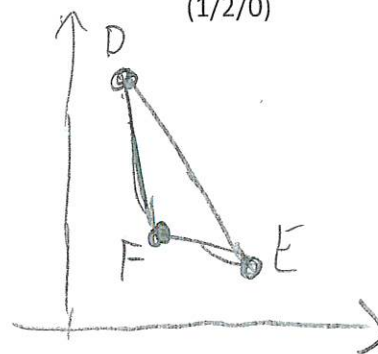
Polygon $(A, C, B) \Rightarrow$ Sidorerna är: $AB \approx 5,385$
 $BC \approx 13,454$
 $AC \approx 8,944$

Omkretsen blir då: $27,78 \text{ le}$

c) En ny mindre triangel skapas med hörn i mittpunkterna på respektive sida på den givna triangeln. Undersök hur många procent mindre den triangelns omkrets är jämfört med den större.

(1/2/0)

Mittpunkt $(A, B) \Rightarrow D = (0,5; 6)$
Mittpunkt $(A, C) \Rightarrow E = (5, 1)$
Mittpunkt $(B, C) \Rightarrow F = (2,5; 2)$



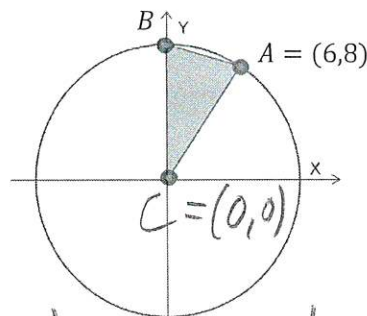
Polygon av dessa 3 punkter:

Polygon $(D, E, F) = t_2$

Omkrets $(t_2) \Rightarrow 13,892$

Andel $= \frac{13,892}{27,78} = 0,5 \Rightarrow 50\% \text{ mindre}$

- D3. Figuren visar en cirkel med centrum i origo.
 Punkten $A = (6,8)$ ligger på cirkeln.
 En triangel med hörn i origo, A samt den punkt där cirkeln möter y -axeln (B) bildas.



Bestäm triangelns area och omkrets.

(1/2/0)

Svara med 2 decimalers noggrannhet!

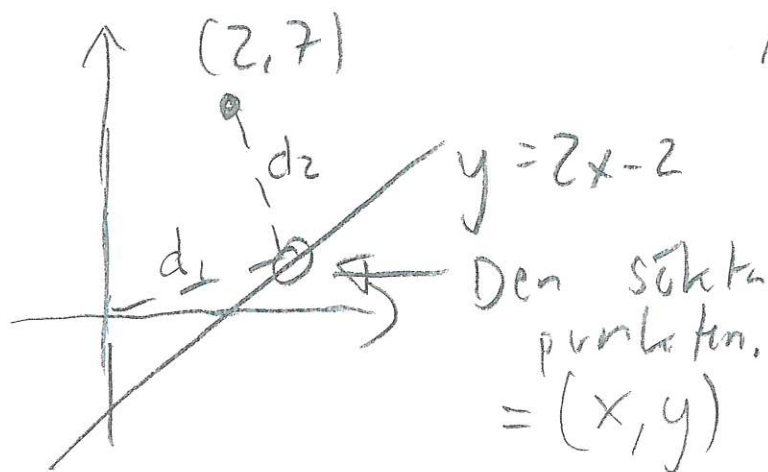
I en cirkel är radien lika stor oavsett riktning
 y -värdet för punkt B motsvarar cirkelns radie,
 som förs som avståndet mellan origo och A :
 Avstånd (C, A) $\Rightarrow r = 10 \Rightarrow B = (0,10)$

Polygon (A, C, B) = $t_1 \Rightarrow$ Area (t_1) = 40 ae
 Omkrets (t_1) \approx 28,94 le

- D4. Det finns en punkt på linjen $y = 2x - 2$ som har lika långt till punkten $(2,7)$ som den har till origo. Bestäm punktens koordinater.

Svara med 1 decimalers noggrannhet! x

(0/3/0)



Avståndet till origo:

$$d_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + (2x-2)^2}$$

Samma avstånd \Rightarrow

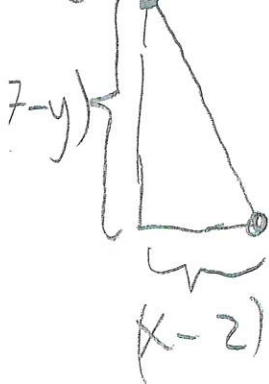
$$d_1 = d_2$$

$$\text{Lös} \Rightarrow x = \frac{81}{32}$$

$$\approx 2,53$$

Avståndet till $(2,7)$

$(2,7)$



$$d_2 = \sqrt{(x-2)^2 + (7-y)^2}$$

$$(x, y) = [y = 2x - 2] =$$

$$= \sqrt{(x-2)^2 + (7-(2x-2))^2}$$

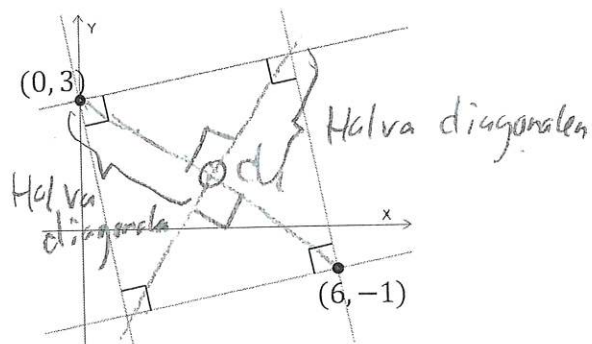
D5. Figuren visar fyra linjer som tillsammans bildar en kvadrat i koordinatsystemet.

Två av kvadratens hörn motstående hörn ligger i punkterna $(0,3)$ och $(6,-1)$

Bestäm kvadratens area

Svara med 2 decimalers noggrannhet!

(0/0/2)

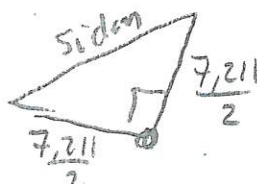


Diagonalens längd: :

$$\text{Sträcka}(A, B) = 7,211$$

Mittpunkten: $(3,1)$

Diagonalerna möts i en rät vinkel \Rightarrow



Pyth. sats: $3,606^2 + 3,606^2 = \text{sidan}^2$
 $\Rightarrow \text{sidan} = 5,099$

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \text{sidan}^2 \\ &= 5,099^2 = 26,00 \end{aligned}$$

D6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

(0/1/2)

Triangeln i koordinatsystemet har sina hörn i punkterna A , B och P .

Punkten P är rörlig längs x -axeln och dess x -koordinat ligger i intervallet $0 < x < 6$.

Linjen L går genom punkterna A och P .

Bestäm ett samband för hur triangelns area T beror av linjens riktningskoefficient k .

Om P har koord: $(x, 0)$ gäller:

Arean fås som

$$= \frac{6 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot x}{2} = 12 - 2x$$

Sambandet mellan x och k ges av

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-4)}{x - 0} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{4}{k}$$

Arean blir då: $A = 12 - 2 \cdot x = 12 - \frac{8}{k}$