FACIT

Matematik 2c – Repetition

Algebra, p-q, rotekvationer, andragradsfunktioner, exponentialfunktioner

Del 1 – Utan digitalt hjälpmedel! Endast svar krävs!

1. Lös ekvationen

$(x+2)(x-4)=0$

Lös varje faktor var för sig

$x+2=0$ $\quad$ $x-4=0$

$x_1=-2$ $\quad$ $x_2=+4$

Svar: $x_1 =$ -2 $\quad x_2 =$ 4 (1/0/0)

2. Utveckla och förenkla uttrycken nedan så långt som möjligt.

a) $(x-4)^2+16$ $= x^2-8x+16+16$

Skriv som 2 ( ) eller använd kvadreringsregeln

Svar: $x^2-8x+32$ (1/0/0)

b) $4-2(2x+2)^2+4x$ $= 4-2\cdot(4x^2+8x+4)+4x = 4-8x^2-16x-8+4x$

Börja med parenteserna

$(2x+2)^2=4x^2+8x+4$

Svar: $-8x^2-12x-4$ (0/1/0)

c) $(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})+x$ $= x^2-x+x$

Konjugatregeln:

$(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})=x^2-(\sqrt{x})^2$

Svar: x^2 (0/1/0)

3. Lös ekvationen $\sqrt{x+22}=5$

$x+22=25$

$x=3$

Om svaret ska bli 5 är siffran under roten $=25$

Svar: $x=3$ (1/0/0)

4. Ange vad som ska stå i de tomma parenteserna nedan för att likheten ska gälla. (0/1/0)

$$\left(4y+\frac{x}{2}\right)\cdot\left(4y-\frac{x}{2}\right)=\underbrace{16y^2-\frac{x^2}{4}}$$

Två st konjugat

Två termer med – mellan
$\Rightarrow$ konjugatregeln

5. För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = 5x(x-6)$

a) Ange funktionens *nollställen*. $\Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 5x(x-6)=0$

Svar: $x_1=0 \quad x_2=6$ (1/0/0)

b) Ange funktionens minsta värde.

Minsta värdet motsvarar

$f(\text{symm. linjen}) = 5\cdot 3 \cdot (3-6)$ **Svar:** $f(3) = -45$ (0/1/0)

Symm. linjen ligger mittemellan nollställena, $x=3$

6. Andragradsfunktionen g har sitt ena nollställe vid $x=-3$ och sin symmetrilinje vid $x=2$.

Ange funktionens andra nollställe.

Skiss av info!

Svar: $x = 7$ (1/0/0)

5 steg, 5 steg, -3, 2

$\Rightarrow x_2 = 2+5$

7. Företagelina köpte ett företag år 2022.
Enligt hennes prognoser väntas företagets värde följa modellen

$V(x) = 1{,}5 \cdot 1{,}35^x$

där V är värdet i miljoner kronor och x är antalet år som gått sedan inköpet år 2022.

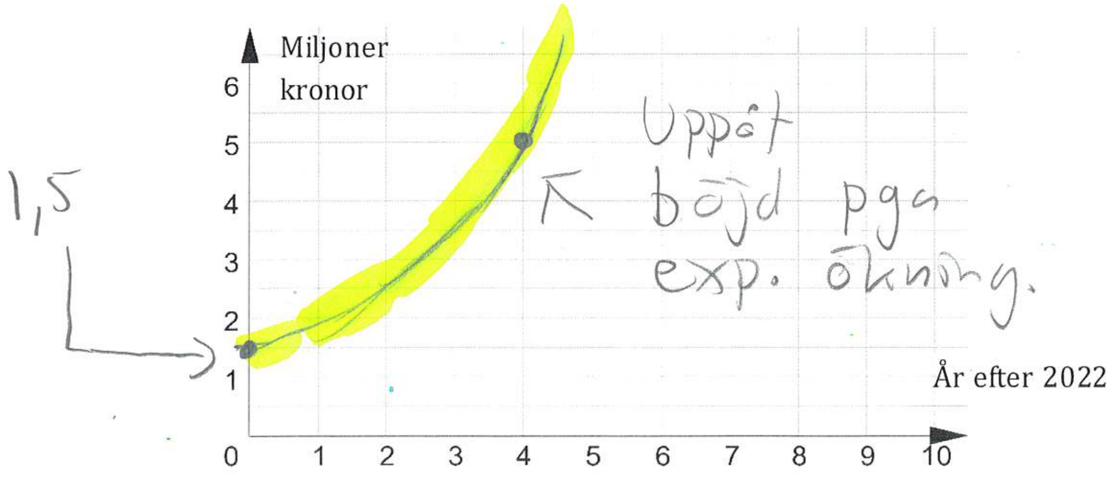
a) Hur många procent ökar företagets värde med varje år?

För. faktorn 1,35
$\Rightarrow +35\%$

Svar: $+35\%$/år (1/0/0)

b) År 2026 väntas företaget vara värt ungefär 5 miljoner kronor. $\Rightarrow (4, 5)$

Använd koordinatsystemet nedan för att skissa grafen till $V(x)$ (1/0/0)

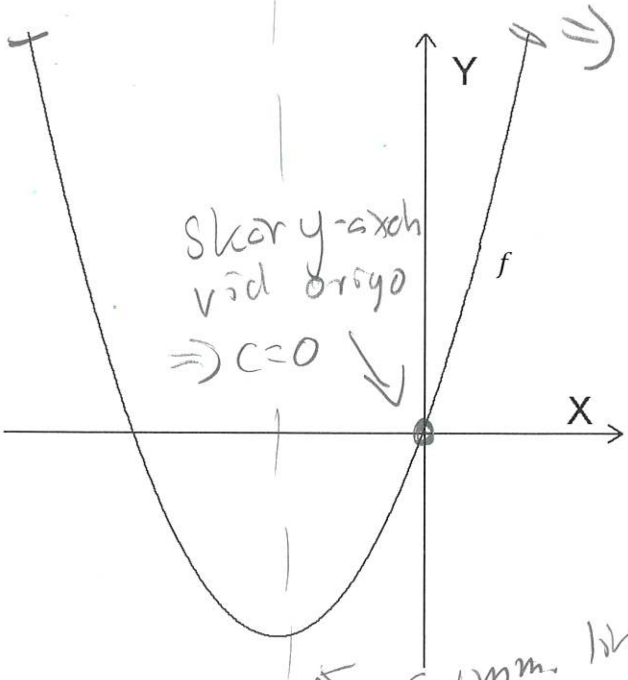


8. Till höger visas grafen till andragradsfunktionen f

"Glad graf" $\Rightarrow +x^2$

a) Ett av alternativen **A – H** nedan visar funktionsuttrycket till f
Vilket av alternativen är det?

A	$x^2 + 2x$
B	$x^2 - 2x$
C	$x^2 + 2x - 1$
D	$x^2 - 2x - 1$
E	$-x^2 + 2x$
F	$-x^2 - 2x$
G	$-x^2 + 2x + 1$
H	$-x^2 - 2x - 1$



Skär y-axeln vid origo $\Rightarrow c=0$

symm. linjen på minussidan $\Rightarrow +2x$

Svar: A (1/1/0)

b) Punkterna $(a, 224)$ och $(14, 224)$ ligger båda på grafen till f, på varsin sida om symmetrilinjen. Ange värdet på talet a

x^2+2x

Symm. linjen fås via pq:

$-1 \quad 1 \quad 1-0$

Svar: $a =$ -16 (0/1/0)

$\xleftarrow{15 \text{ steg}} -1 \xrightarrow{15 \text{ steg}} 14$

9. Nedan visas värdetabellen för **exponentialfunktionen** $E(x)$.

x	$E(x)$
-1	2
0	6
1	

$\cdot 3$

$\Rightarrow$ Gånger samma tal hela tiden

a) Bestäm $E(1)$ $= 6 \cdot 3$

Svar: 18 (1/0/0)

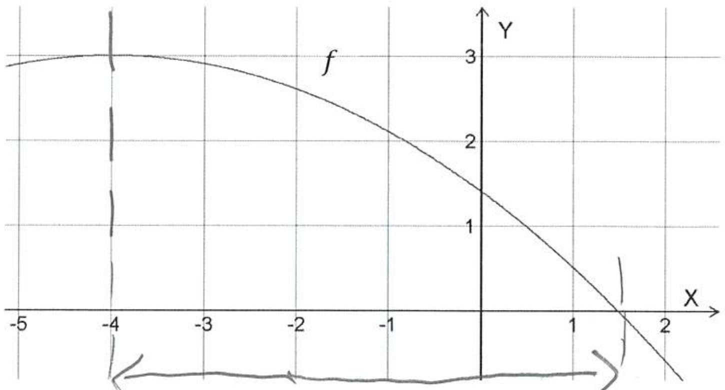
b) Bestäm funktionsuttrycket för $E(x)$.

Svar: $6 \cdot 3^x$ (0/1/0)

6:an hör ihop med $x=0$

Varje nytt värde ges av det tidigare $\cdot 3$

10. Figuren visar delar av grafen till en andragradsfunktion, f



5,5 steg

a) Bestäm symmetrilinjens ekvation.

Svar: $x = -4$ (1/0/0)

b) Bestäm funktionens nollställen.

Det är 5,5 steg mellan symm. linjen och högra nollstället $\Rightarrow$ vänstra blir $x_1 = -4 - 5{,}5 = -9{,}5$

Svar: $x_1 = -9{,}5 \quad x_2 = 1{,}5$ (0/1/0)

11. Förenkla uttrycket nedan så långt som möjligt.

$\sqrt{(y+2)^2 - (y-2)^2}$

OBS! $\sqrt{(\ )^2 - (\ )^2}$ tar INTE ut $(\ )^2$

$\sqrt{y^2 + 4y + 4 - (y^2 - 4y + 4)}$

$= \sqrt{y^2 + 4y + 4 - y^2 + 4y - 4}$

Svar: $\sqrt{8y}$ (0/1/0)

Maxpunkt

12. Ange valfri andragradsfunktion som...

a) ...har sin maxpunkt vid $x = 5$.

$\Rightarrow$ symm. linje vid $x = 5$

$-$ framför x^2

$\Rightarrow$ pq ger $5 \pm \boxed{}$

Svar: ex: $f(x) = -2(x-4)(x-6)$ eller $f(x) = -x^2 + 10x + 3$ (0/1/0)

b) ...har en minpunkt vid $(-4, 5)$.

Symm. linje $x = -4$

ex: $x^2 + 8x + c$

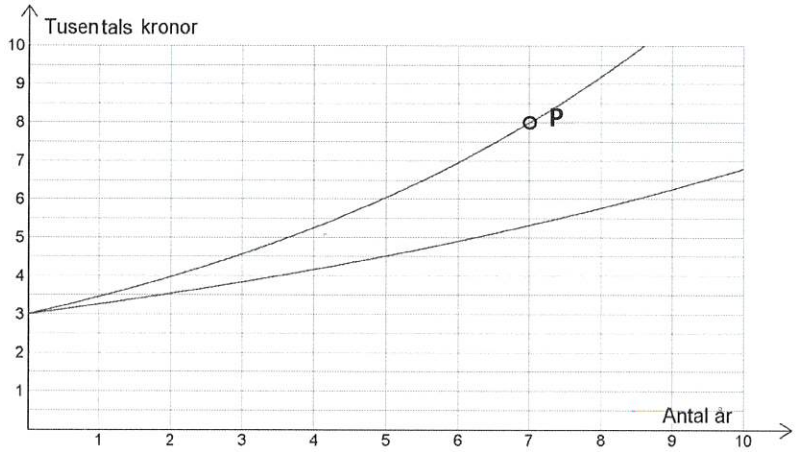
$f(-4) = 5 \Rightarrow 16 - 32 + c = 5 \Rightarrow c = 21$

Svar: ex: $f(x) = x^2 + 8x + 21$ eller: $f(x) = (x+4)(x+4) + 5$ (0/0/1)

13. På ett fondkonto sätts en viss summa in.
Figuren nedan visar två möjliga positiva prognoser av kontots utveckling.

Prognos A visar en exponentiell årlig ökning på 8,5 %.

Prognos B visar en exponentiell årlig ökning som är större än 10 %.



+8,5%

a) Vad är **förändringsfaktorn** som hör ihop med den nedre grafen i figuren?

Svar: 1,085 (1/0/0)

b) I figuren finns punkten **P** markerad. Denna har koordinaterna (7, 8)
Utgå från denna punkt och ta fram en **ekvation** som gör det möjligt att bestämma förändringsfaktorn för den övre grafen.

Svar: $3 \cdot a^7 = 8$ (0/1/0)

c) Ta fram en funktion, $V(t)$, som beskriver prognos A, men där tiden, t, beskriver **antalet veckor** i stället för antalet år.

Svar: $V(t) = 3\left(\sqrt[52]{1,085}\right)^t$ (0/0/1)

$= 3 \cdot 1,085^{t/52}$

Eftersom ett år består av 52 veckor gäller:
0 veckor: 3 $\cdot a$
$\cdot a$
...
52 veckor: $3 \cdot 1,085$

$\Rightarrow 3 \cdot a^{52} = 3 \cdot 1,085$
$a^{52} = 1,085$
$a = \sqrt[52]{1,085}$

14. Förenkla uttrycken nedan så långt som möjligt

a) $\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{x^2}{9}-\frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$\left(\frac{4x^2}{9}+2\cdot\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{x^2}{9}-\frac{1}{4}$

$=\frac{4x^2}{9}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}+\frac{x^2}{9}-\frac{1}{4}$

Svar: $\frac{5x^2}{9}+\frac{2x}{3}=\frac{5x^2+6x}{9}$ (0/1/0)

b) $\frac{5(3x+4)^2-10(4+2x)}{5}=$

$=(3x+4)^2-2(4+2x)=$

$=9x^2+24x+16-8-4x$

Svar: $9x^2+20x+8$ (0/1/0)

c) $\frac{(\sqrt{5+x}-\sqrt{x})(\sqrt{5+x}+\sqrt{x})+(\sqrt{5+x}+\sqrt{x})^2}{2}$ ← kvadreringsregeln

konjugatregeln → $\frac{(5+x-x)+(5+x+2\cdot\sqrt{5+x}\cdot\sqrt{x}+x)}{2}$

$=\frac{10+2x+2\sqrt{5+x}\sqrt{x}}{2}$

Svar: $5+x+\sqrt{5+x}\cdot\sqrt{x}$ (0/0/1)

15. Lös ekvationerna

a) $\sqrt{\sqrt{2x+5}}=3$ Kvadrera två gånger

$\Downarrow$

$2x+5=81 \Rightarrow 2x=76 \Rightarrow x=76/2$

Svar: $x=38$ (0/1/0)

b) $(2x-1268)^2-4(2x-1268)=0$ Börja INTE med att utveckla

Bryt istället ut $(2x-1268)$

$\Rightarrow (2x-1268)(2x-1268-4)=0$

Lös varje faktor för sig:

$2x_1-1268=0$, $2x_1=1268$ $\quad$ $2x_2-1272=0$, $2x_2=1272$

Svar: $x_1=634 \quad x_2=636$ (0/0/1)

16. För en andragradsfunktion, f, gäller att den har en maximipunkt vid $(2,\pi)$

Funktionen kan skrivas på formen $f(x)=-x^2+bx+c$

Ange värdet på konstanterna b och c.

Maxpunktens x-koord = 2

$\Rightarrow$ Symmetrilinjen $=2$: pq baklänges

$-x^2+4x+?$

$x^2-4x+?$

Maxpunktens y-koord $=\pi$ $\Rightarrow$ $f(2)=\pi$

$-2^2+4\cdot 2+c=\pi \Rightarrow$

$4+c=\pi$

Svar: $b=4$

$c=\pi-4$ (0/1/1)

17. För exponentialfunktionen $f(x)$ gäller att:

$f(x) = 96 \cdot a^x$
$f(b) = 12$
$f(b+2) = 3$

mellan b och b+2 har det skett 2 steg $\Rightarrow 12 \cdot a^2 = 3 \Rightarrow a = 0{,}5$

$f(b) = 12 \Rightarrow 96 \cdot 0{,}5^b = 12$

$0{,}5^b = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$

Bestäm värdet av konstanten b.

$\left(\frac{1}{2}\right)^b = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow b = 3$

Svar: $b = 3$ (0/0/1)

18. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Det har skett en subst. där $t = x - \sqrt{3}$

Lös ekvationen $(x-\sqrt{3})^2 - 4(x-\sqrt{3}) + 3 = 0$ om du vet att $t^2 - 4t + 3 = 0$ har lösningarna $t_1 = 3$ och $t_2 = 1$. Svara med exakta värden.

$t_1 = 3 \Rightarrow x_1 - \sqrt{3} = 3$

$t_2 = 1 \Rightarrow x_2 - \sqrt{3} = 1$

$x_1 =$ $3 + \sqrt{3}$

$x_2 =$ $1 + \sqrt{3}$ (0/0/1)

19. För en andragradsfunktion, f, gäller att den har en minimipunkt vid $(5, 12)$

Funktionen kan skrivas på formen $f(x) = 3x^2 + (b+6)x + c$

Dela med 3 och pq-a

$\Rightarrow \boxed{5}$

Ange värdet på konstanten b.

$x^2 + \frac{b+6}{3} + \frac{c}{3}$

$-\frac{b+6}{6} \quad \frac{b+6}{6} \cdot \frac{b+6}{6} - \frac{c}{3}$

Svar: $b = -36$ (0/0/1)

$-\frac{b+6}{6} = 5 \Rightarrow -b+6 = 30$

20. Faktorisera uttrycket $4xy^3 - 100x^3y$ så långt som möjligt

Bryt ut $4xy \Rightarrow 4xy(y^2 - 25x^2)$

Konjugatregeln på $(y^2 - 25x^2) \Rightarrow (y-5x)(y+5x)$

Svar: $4xy(y-5x)(y+5x)$ (0/0/1)

21. För ekvationen $\sqrt{x+a} = bx + c$ gäller att a, b och c är konstanter där $a \neq 0, b \neq 0$ och $c \neq 0$.

Ange valfria värden på konstanterna a, b och c så att ekvationen **saknar lösning**.

Det går att resonera på många sätt, ex grafiskt

Svar: ex: $a = -3 \quad b = 1 \quad c = 10$ (0/0/1)

Saknar lösning $\Rightarrow$ Ingen skärning ex:

Del 2 – Utan digitalt hjälpmedel! Fullständiga uträkningar krävs!

22. a) Lös ekvationen $x^2 + 4x - 5 = 0$ med algebraisk metod (2/0/0)

pq: $\triangle\!-2$ $\quad 2 \cdot 2 + 5 = 4 + 5 = 9$

$\sqrt{} \rightarrow \boxed{3}$

$x_1 = -2 + \boxed{3} = 1$

$x_2 = -2 - \boxed{3} = -5$

b) Bestäm symmetrilinjen till funktionen $f(x) = x^2 + 4x - 5$ (1/0/0)

Endast svar krävs!

Symm. linjen motsvarar $\triangle$, dvs $x = -2$

c) Skissa grafen till $f(x) = x^2 + 4x - 5$ i koordinatsystemet nedan. (1/2/0)

Motivera din skiss med relevanta beräkningar!

Nollställen ges i a) ⇒ Skär x-axeln vid 1 och −5

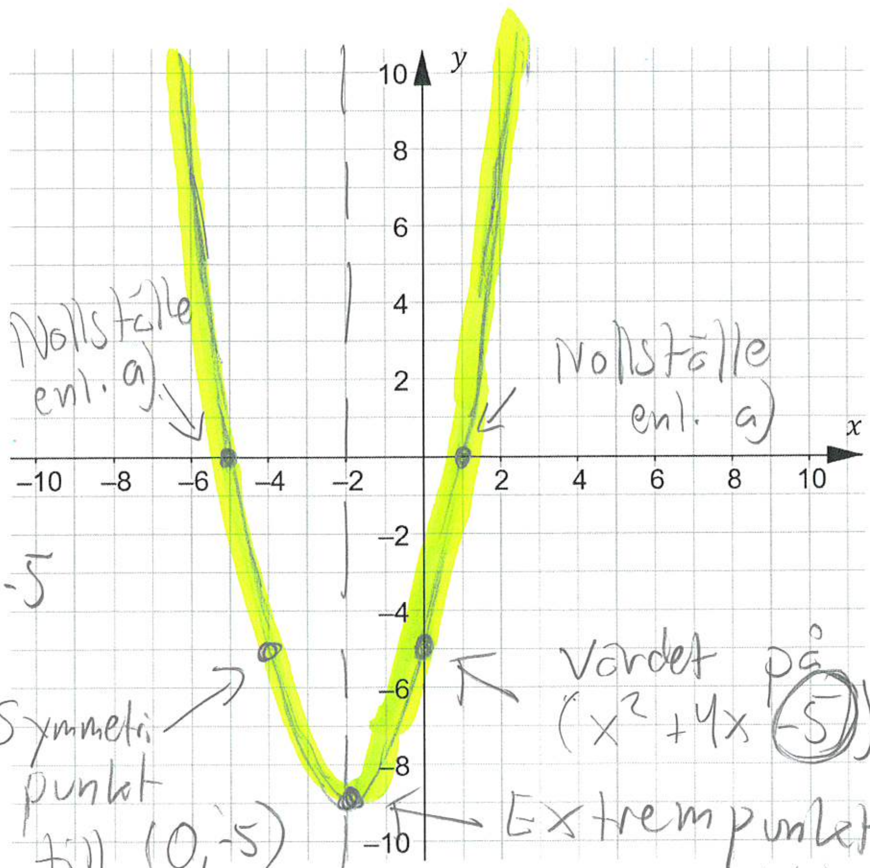
Symm. linjen vid $x = -2$ (enl. b)

Extrempunktens y-värde ⇒

$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5$

$= 4 - 8 - 5$

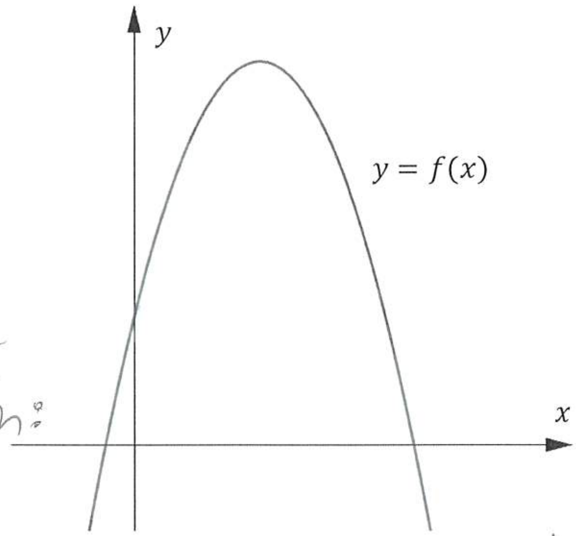
$= -9$



23. Figuren visar grafen till andragradsfunktionen f skriven på formen
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Avgör med hjälp av grafen om a och c är positiva eller negativa tal. (2/0/0)

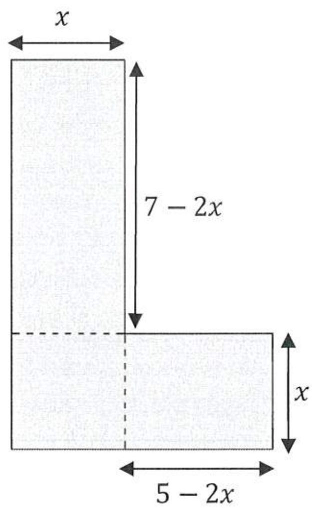
Motivera ditt svar!



a är ett negativt tal pga grafens form:
Sur graf $\Rightarrow$ $a < 0$
c är ett positivt tal pga skärning med y-axeln.
Skär ovanför x-axeln $\Rightarrow$ $c > 0$

24. Figuren till höger visar ett L-format område med några mått angivna.

Området kommer att få olika utseende och area beroende på vad x är.



a) Ta fram ett förenklat uttryck som beskriver arean av området. (2/0/0)

x, $7-2x$ + x, x + $5-2x$, x =

$= x\cdot(7-2x) + x^2 + (5-2x)\cdot x =$
$= 7x - 2x^2 + x^2 + 5x - 2x^2 = -3x^2 + 12x$

b) Bestäm den största möjliga area som området kan anta (0/2/0)

Största möjliga area motsvarar extrempunktens y-värde:

1) Symm. linjen: $-3x^2 + 12x$ [/-3]
$x^2 - 4x + 0$ [pq]
$+2$ $\underline{2} \cdot \underline{2} - \underline{0}$

2) Max arean: $A(2) = -3\cdot 2^2 + 12\cdot 2 = -12 + 24 = 12$ ae

25. Under en fotbollsmatch gör Bollivar ett inkast. Bollens bana kan beskrivas med den förenklade modellen

$$h(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}2x + 2{,}0$$

där $h(x)$ är bollens höjd över marken och x är det horisontella avståndet i meter längs marken från kastets start.

a) Förklara vad talet 2,0 betyder i det här sammanhanget. (1/0/0)

Höjden som inkastet kastas ifrån

b) Bestäm det horisontella avståndet mellan kastets start och där bollen landar på marken. (1/1/0)

Söker nollstället: $h(x)=0$

$-0{,}02x^2+0{,}2x+2{,}0=0 \quad [/-0{,}02] \leftarrow$ Att dela med $-0{,}02$ motsvarar $\cdot(-50)$

$x^2-10x-100=0 \quad [pq]$

$+5 \pm \sqrt{5\cdot 5+100} = \sqrt{125}$

$\Rightarrow$ Avståndet blir $5+\sqrt{125}$ m

c) Bestäm bollens högsta höjd (0/2/0)

Högsta höjden motsvarar extrempunktens y-koord.

Symm. linjen är vid $x=5$

$h(5) = -0{,}02\cdot 5^2+0{,}2\cdot 5+2 =$

$= -0{,}02\cdot 25+1+2 =$

$= -0{,}5+3 = 2{,}5$ m

26. Joel påstår följande:

Ta tre på varandra följande heltal.

Kvadrera talen.

Summera de kvadrerade talen.

Ta bort fem ifrån summan.

Svaret kommer alltid att bli delbart med tre.

Visa att Joels påstående stämmer för alla på varandra följande heltal, genom att kalla det första talet för x (0/2/0)

"På varandra följande" ⇒ direkt efter varandra

ex 7, 8, 9

Tal 1: x Tal 2: $(x+1)$ Tal 3: $(x+2)$

$\underbrace{x^2+(x+1)^2+(x+2)^2}_{\text{Summera kvadraterna}} \underbrace{-5}_{\text{Ta bort 5}} = x^2+x^2+2x+1+x^2+4x+4-5$

$=3x^2+6x$

Båda termerna är delbara med 3.

VSV

27. Lös ekvationerna

a) $\dfrac{3x(x+4)}{2} = 18$ $[\cdot 2]$ (0/2/0)

$3x(x+4)=36$ $\quad 3x^2+12x=36$ $[-36\ /3]$

$x^2+4x-12=0$ [pq] -2 $\underbrace{\sqrt{2\cdot 2+12}}$

$=\sqrt{16}=4$

$x_1=-2+4=2$

$x_2=-2-4=-6$

b) $\sqrt{4x+5}+4=x$ (0/3/0)

1) Se till att $\sqrt{4x+5}$ står på en sida: $\sqrt{4x+5}=x-4$

2) Kvadrera båda sidor; $4x+5=x^2-8x+16$

3) Gör ekvationen "pq-vänlig": $0=x^2-12x+11$

4) "pq:a": $+6$ $\sqrt{6\cdot 6-11}=\sqrt{25}=5$ $\quad x_1=6+5=11$

$x_2=6-5=1$

5) Kontrollera svaren i rotekv.: $x_1=11 \Rightarrow \sqrt{4\cdot 11+5}=\sqrt{49}=7$ $\quad 11-4=7$ ok

$x_2=1 \Rightarrow \sqrt{4\cdot 1+5}=\sqrt{9}=3$ $\quad 1-4=-3$ Falsk

Svar: $x=11$

28. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften. (0/2/0)

I en lärobok i matematik står det:

"Om differensen mellan två tal är 1 så är differensen mellan det större talets kvadrat och det mindre talets kvadrat alltid lika stor som talens summa."

Visa att detta gäller för alla sådana tal.

"Differensen" = Svaret av minus

Tal 1: x Tal 2: y

Differens = 1 ⇒ $x-y$

Differens mellan kvadraterna ⇒ x^2-y^2

$x^2-y^2 =$ [konjugatregeln] $= (x-y)(x+y) =$

$[(x-y)=1] = 1\cdot(x+y) = x+y =$ Talens summa VSV

29. Om man behöver genomföra huvudräkning med krångliga tal kan man ta hjälp av algebra, t.ex. *konjugatregeln*.

Använd konjugatregeln för att bestämma värdet av $10003 \cdot 9997$. (0/2/0)

$10003 = 10000+3$

$9997 = 10000-3$

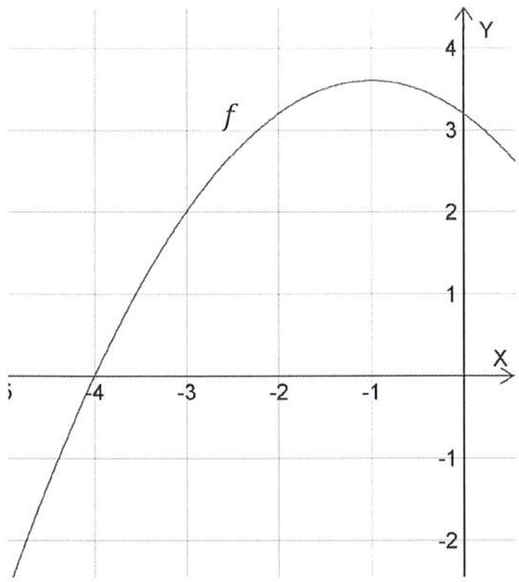
$10003 \cdot 9997 = (10000+3)\cdot(10000-3) =$

[konjugatregeln] $= 10000^2 - 3^2 =$

$= [10000^2 = 100000000] = 100000000 - 9 =$

$= 99999991$

30. Figuren till höger visar delar av grafen till andragradsfunktionen f



a) Vilket värde är störst?
$f(-10)$ eller $f(10)$

Kortfattad motivering krävs! (0/1/0)

Symm. linjen är vid −1
⇒ Närmest symm. linjen blir störst
−10 = 9 steg ifrån
10 = 11 steg ifrån
⇒ $f(-10)$ är störst

b) Ta fram funktionsuttrycket till f (0/1/1)
Svara exakt!

Utgå från faktorform: $f(x) = a \cdot (x - x_1)(x - x_2)$
Enligt bilden gäller: ett nollställe $x_1 = -4$
Andra nollstället fås via symmetrin:
3 steg till höger ⇒ $-1 + 3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$

Värdet på a fås via en annan punkt
ex: $(-3, 2)$

$f(x) = a \cdot (x+4) \cdot (x-2) \Rightarrow 2 = a \cdot (-3+4) \cdot (-3-2)$

$2 = a \cdot (1) \cdot (-5) \Rightarrow a = -\frac{2}{5} = -0{,}4$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}4(x+4)(x-2)$

(kan även skrivas i utv. form)

31. Lös ekvationen $(\sqrt{2}+x)^2 = -12 + 7(\sqrt{2}+x)$ (0/0/2)

Börja med att substituera $(\sqrt{2}+x) = t \Rightarrow t^2 = -12 + 7t$

Skriv om på pq-form: $t^2 - 7t + 12 = 0$

pq:a $\Rightarrow$ $t = +\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} - 12} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}} =$

$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}$ → $t_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$

→ $t_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Byt sedan tillbaka från t till x och bestäm motsvarande x-värden $\Rightarrow$

$t_1 = 4 \Rightarrow \sqrt{2} + x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - \sqrt{2}$

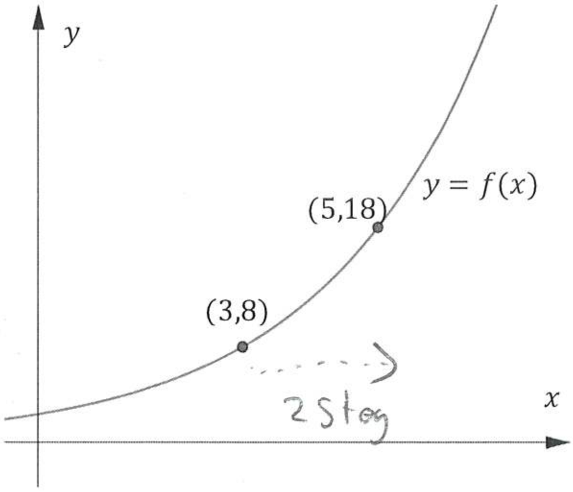
$t_2 = 3 \Rightarrow \sqrt{2} + x_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - \sqrt{2}$

32. Figuren visar grafen till exponentialfunktionen f.

Grafen passerar punkterna (3,8) och (5,18).

Ta fram funktionsuttrycket för $f(x)$ (0/0/2)

Svara exakt!



x	y
0	
1	
2	
3	8
4	
5	18

$\cdot a$, $\cdot a$ $\Rightarrow 8 \cdot a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

$a = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

För att få värdet på c utgå från ngn känd punkt, ex (3, 8) $\Rightarrow$

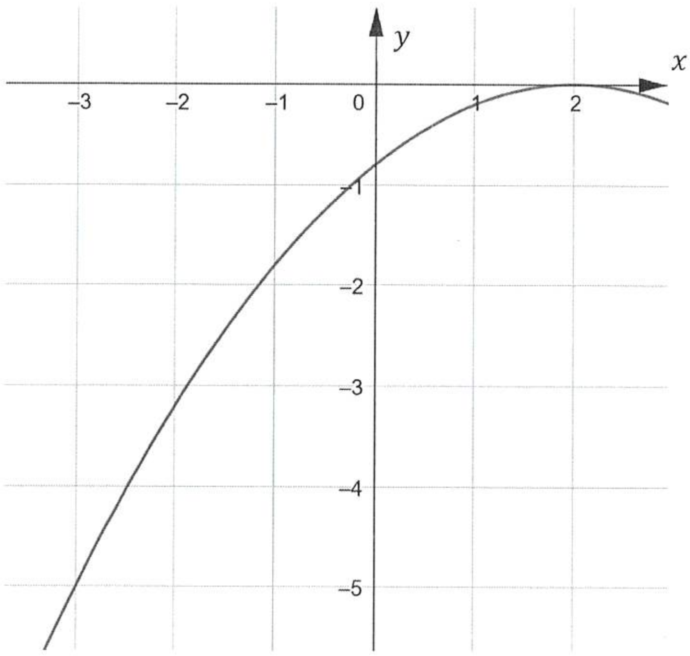
$c \cdot a^3 = 8$ $\left[a = \frac{3}{2}\right]$

$c \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 8 \Rightarrow c \cdot \frac{27}{8} = 8$

$\Rightarrow c = \frac{64}{27}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{64}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

33. Figuren visar delar av grafen till en andragradsfunktion med maxpunkt vid $(2,0)$



Båda nollställena är $x = 2 \Rightarrow$

Funktionen i faktorform:

$f(x) = a \cdot (x-2)(x-2)$

Ta fram funktionsuttrycket till grafen. (0/1/1)

Punkten $(-3, -5)$ på grafen $\Rightarrow -5 = a \cdot (-3-2)(-3-2)$

$-5 = a \cdot (-5) \cdot (-5) \Rightarrow 1 = -5a \Rightarrow a = -\frac{1}{5} = -0{,}2$

$\Rightarrow f(x) = -0{,}2(x-2)(x-2) = -0{,}2x^2 + 0{,}8x - 0{,}8$

34. I andragradsekvationen $ax^2 + 2x + c = 0$ är a och c konstanter.

Bestäm ett samband som ska gälla mellan a och c för att ekvationen ska ha en ***dubbelrot*** (dvs att båda nollställena är samma siffra) (0/1/2)

Om båda nollställena är samma $\Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow$

"$\triangle + \square = \triangle - \square$" $\Rightarrow \square = 0 \Rightarrow \sqrt{} = 0$

$ax^2 + 2x + c = 0$ [/a]

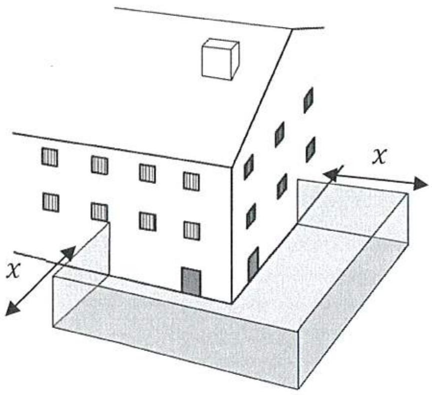
$x^2 + \frac{2}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ [pq]

$-\frac{1}{a} \quad \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a}} \longrightarrow \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$

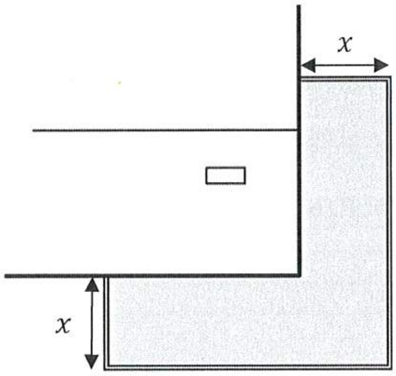
ex: $\frac{1}{a^2} - \frac{ca}{a} = 0 \Leftrightarrow c \cdot a = 1$

OBS! Sambandet kan skrivas på många sätt.

35. Ett fängelse ska bygga en ny rastgård **symmetriskt placerad** vid ett av byggnadens hörn Stängslet ska byggas sträckan x meter ut från byggnadens väggar. Se figurerna nedan.



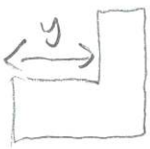
Figur 1 – Rastgården sedd snett uppifrån



Figur 2 – Rastgården sedd rakt ovanifrån

Bestäm det värde på x som ger största möjliga arean om den ska byggas av 90 meter stängsel. (0/0/3)

1) Inför variabeln y, exempelvis:



2) Uttryck arean med TVÅ variabler: x · y + x · x + x · y

$A = x \cdot y + x^2 + x \cdot y = x^2 + 2xy$

3) Skriv sambandet mellan variablerna som en likhet:
"90 m stängsel" $\Rightarrow x + x+y + x+y + x = 90$

$4x + 2y = 90$

4) Lös ut y ur 3) $\Rightarrow y = (45 - 2x)$

5) Kombinera 2) med 4) för att få en funk. uttryckt i variabeln x: 4) $y = (45 - 2x)$

2) $A = x^2 + 2x(y)$

$\Rightarrow A = x^2 + 2x \cdot (45 - 2x) = x^2 + 90x - 4x^2 = -3x^2 + 90x$

största möjliga area finns vid symmetrilinjen:

$-3x^2 + 90x$ [/-3] $\Rightarrow x^2 - 30x$ [pq]

$+15$ $\quad 15 \; 15 = 0 \Rightarrow x = 15$

FACIT

Matematik 2c – Repetitionsprov

Algebra, p-q, rotekvationer, andragradsfunktioner, exponentialfunktioner

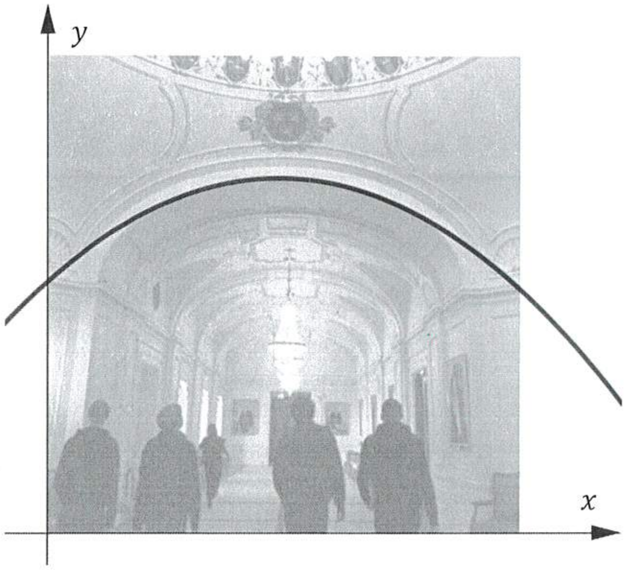
Del 3 – Med digitalt hjälpmedel! Fullständiga uträkningar krävs!

D1. Figuren visar en bild tagen under NA1BI:s skolresa till Riksdagen under VT 2023.

På bilden syns ett valv.

En mattelärare tycker att det valvet ser ut som en andragradsfunktion och lägger därför in bilden i Geogebra och gör en

Nedan visas resultatet.



a) Nedan visas fyra stycken förslag på andragradsfunktioner.

$A: f(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}9x + 2{,}4$

$B: f(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}9x$

$C: f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x + 2.4$

$D: f(x) = -0{,}2x^2 + 0{,}9x$

Vilket av alternativen ovan stämmer bäst in på grafen i figuren? (1/0/0)

Motivera ditt svar!

C. Den har formen av en "sur mun" $(-0{,}2x^2)$ och skär y-axeln en bit upp $(+2{,}4)$

b) Hur högt upp är det till högsta punkten (räknat från nedersta delen av bilden)?

Endast svar krävs!

Skriv in i Geogebra och använd "Extrempunkt" $\Rightarrow (2.25, 3.41) \Rightarrow$ 3,41 m

D2. Lös ekvationen $\sqrt{2x+3} = 2{,}6x - 9$ (1/0/0)
Svara med två decimaler!

"Lös" eller "Skärning" $\Rightarrow x \approx 4{,}83$

D3. En traktors bränsleförbrukning beror bland annat på traktorns hastighet.

Under vissa förhållanden kan en traktors bränsleförbrukning beskrivas med modellen

$B(x) = 0{,}001x^2 - 0{,}04x + 0{,}92$

Där B (liter/km) är bränsleförbrukningen och x (km/h) är traktorns hastighet.

a) Bestäm traktorns bränsleförbrukning vid hastigheten 10 km/h (1/0/0)
Endast svar krävs!

$B(10) = 0{,}001 \cdot 10^2 - 0{,}04 \cdot 10 + 0{,}92 = 0{,}62$ liter/km

b) Enligt denna modell, hur många procent större är förbrukningen vid hastigheten 40 km/h jämfört med den lägsta bränsleförbrukning traktorn kan ha? (0/1/0)

Lägsta bränsleförbrukning fås vid extrempunkten $\Rightarrow 0{,}52$

$B(40) = 0{,}92$ $\frac{0{,}92}{0{,}52} = 1{,}77 \Rightarrow$ 77% större

D4. I andragradsekvationen $x^2 + (a-4)x + (2b-3) = 0$ är a och b konstanter.
Ekvationen har lösningarna $x_1 = 3$ och $x_2 = -5$.

Bestäm värdet på konstanterna a och b (0/2/0)

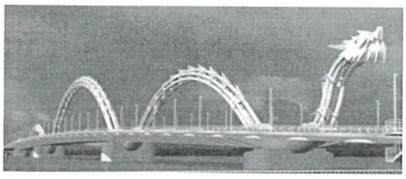
Om lösningarna är 3 och −5 är ekvationen i faktorform: $(x-3)(x+5) = 0$
Gångras dessa ihop ("Expandera" i Geogebra) fås: $x^2 + 2x - 15 = 0$
Jämför med den givna:

$x^2 + 2x - 15 = 0$
$x^2 + (a-4)x + (2b-3) = 0$

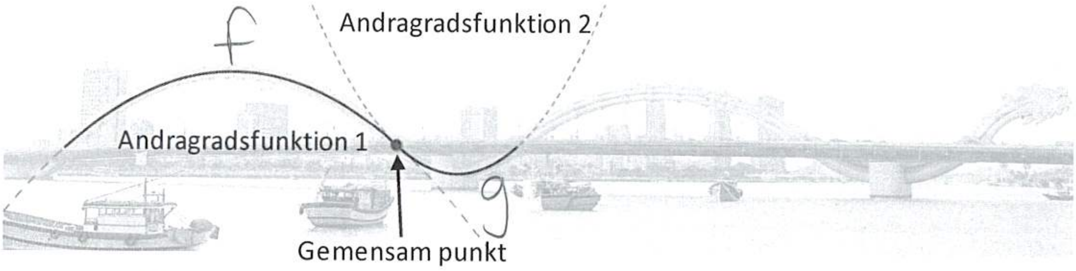
$\Rightarrow$ $a - 4 = 2 \Rightarrow a = 6$

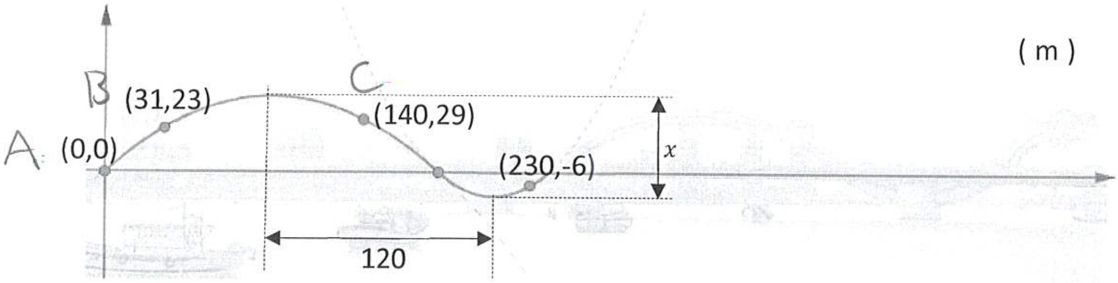
$2b - 3 = -15$
$\Rightarrow b = -6$

D5. År 2013 färdigställdes en pampig bro i form av en eldsprutande drake.
Bron finns i Vietnam och går under namnet "Dragon Bridge"



En matematiker utgår från att formen på bron kan beskrivas med graferna till flera andragradsfunktioner som placerats bredvid varandra, så att en punkt blir gemensam hos intilliggande funktioner. Figuren nedan visar de två första.



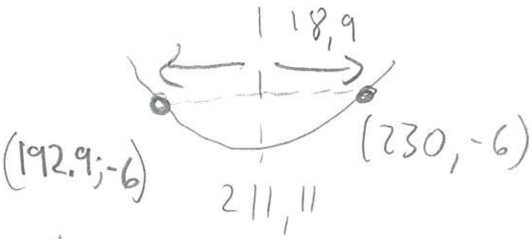


Matematikern mäter upp några mått och lägger in dessa som punkter i ett koordinatsystem.
Mellan vändpunkternas x-värden är det 120 meter.
Utgå från matematikerns modell för bron och **bestäm höjdskillnaden mellan högsta och lägsta punkten** i de första två andragradsfunktionerna, dvs det som är markerat med x i figuren ovan. (0/1/2)

1) Regression på A, B och C $\Rightarrow f(x) = -0{,}0049x^2 + 0{,}894x$

2) Symm. på g ska vara 120 mer än symm på f $\Rightarrow$ Extrempunkt(f) $\Rightarrow$ (91,11; 40,73) $\xrightarrow{+120}$ $x = 211{,}11$

3) Symm. på g ger symm. punkten till (230,-6)



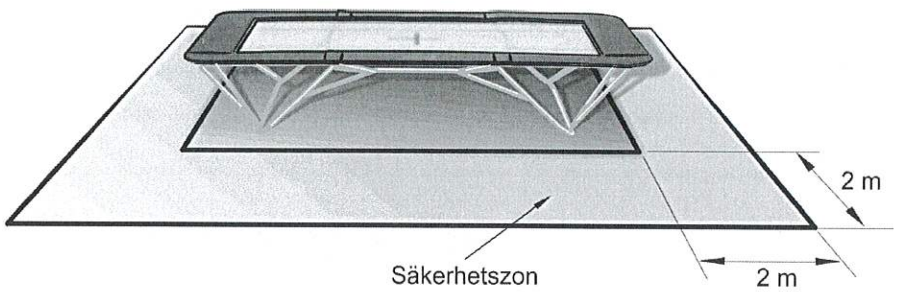
4) Punkten där f skär x-axeln är gemensam hos f och g $\Rightarrow$ "Rot(f)" $\Rightarrow$ (182.22;0)

5) RegressionPoly på de tre punkterna på g $\Rightarrow g(x) = 0{,}0126x^2 - 5{,}302x + 549{,}17$

6) Skillnaden mellan extrem-punkternas y-värden $\Rightarrow$ ~~x~~ $= 40{,}73 - (-10{,}48) = 51{,}2$ m

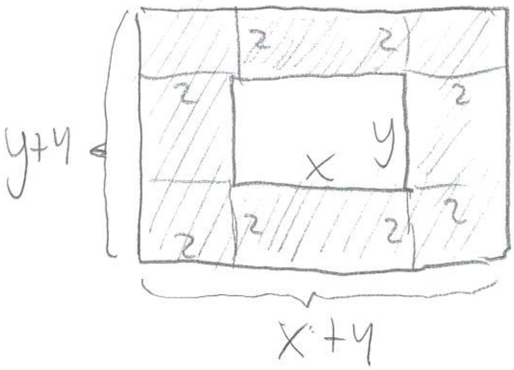
D6. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Företaget "Lexelius Hopp och Studs" säljer rektangulära studsmattor. Varje studsmattas långsida är dubbelt så lång som dess kortsida. Företaget rekommenderar att det finns en 2,0 meter bred säkerhetszon runt studsmattan och att säkerhetszonens area ska vara minst tre gånger så stor som studsmattans area.



Bestäm måtten på en studsmatta som har en 2,0 meter bred säkerhetszon och där säkerhetszonens area är tre gånger så stor som studsmattans area.

(0/0/3)



1) Inför variabler, x och y

2) Uttryck arean av säkerhetszonen:

$$(x+4)(y+4) - xy = 4x + 4y + 16$$

3) "Långsidan dubbelt så lång som kortsidan" $\Rightarrow y = 0,5x$

4) Arean av säkerhetszonen tre gånger så stor som studsmattans area $\Rightarrow 4x + 4y + 16 = 3 \cdot xy$

5) kombinera 3) med 4) $\Rightarrow 4x + 4 \cdot 0,5x + 16 = 3 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$

$\Rightarrow 6x + 16 = 1,5x^2$

6) Lös med ex. "Lös" $\Rightarrow x \approx 5,83$ m $\Rightarrow y = 0,5x \Rightarrow$

$y \approx 2,95$ m