FACIT

3.3 Exponentialfunktioner

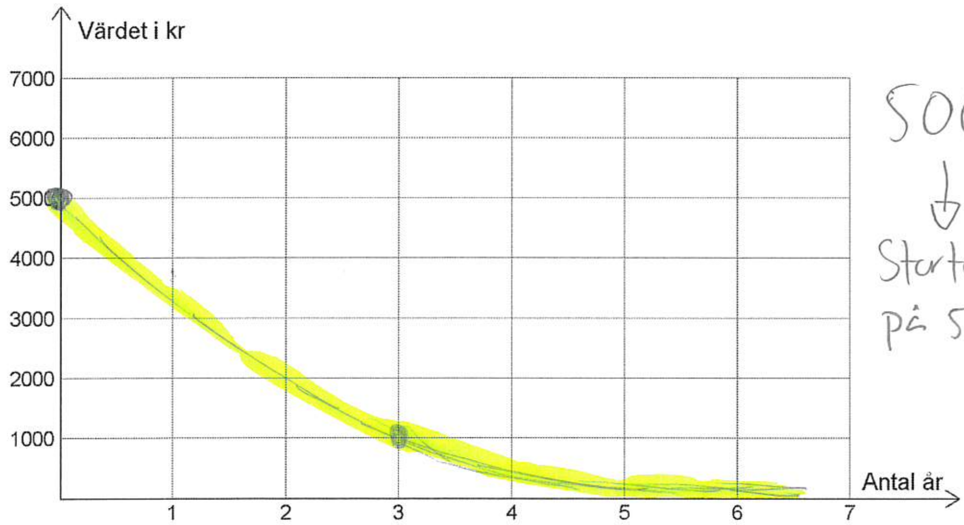
Del 1 – Utan digitala hjälpmedel

1. Värdet på en telefon, V, väntas under några år beskrivas av modellen
$V(x) = 5000 \cdot 0{,}6^x$
där x är antalet år som gått sedan datorn köptes in.

a) Hur många procent minskar telefonens värde med varje år?

För. faktor $0{,}6 \Rightarrow$ Minskning med 40 %/år (1/0/0)

b) Efter tre år är telefonen värd ungefär 1000 kr.
Gör en **grov skiss** av grafen till V i koordinatsystemet nedan. (1/0/0)



$5000 \cdot 0{,}6^x$

Startar på 5000

Minskar med 40% per år

2. Bo Billigt har satt in 10 000 kr på ett bankkonto med den fasta räntan 5 %. $\Rightarrow F = 1{,}05$
Nu undrar Bo hur länge det dröjer innan pengarna på kontot ökat till 15 000 kr.

Vilken av ekvationerna A – F nedan kan användas för att svara på Bos fråga? (1/0/0)

A: $10000 + 1{,}05x = 15000$

B: $10000 \cdot 1{,}05^x = 15000$

C: $10000 \cdot x^{1{,}05} = 15000$

D: $10000 \cdot 1{,}05x = 15000$

E: $10000 + 1{,}05^x = 15000$

F: $10000 + x^{1{,}05} = 15000$

"Start · För. faktor^x = Slut"

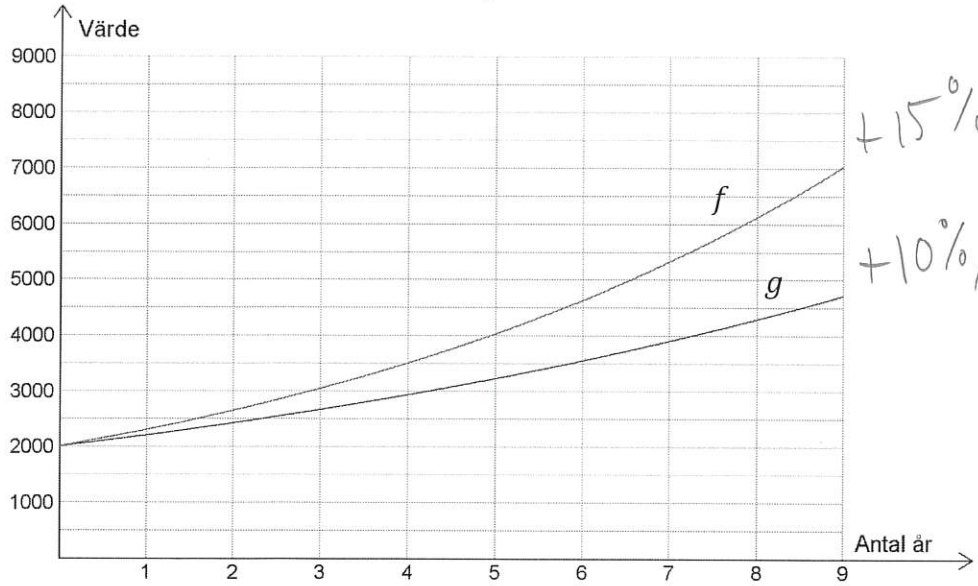
$10000 \cdot 1{,}05^x = 15000$

$\Rightarrow$ B

3. Värdet på ett fondkonto väntas följa två olika prognoser, dels en ökning med 10 % per år, och dels en ökning med 15 % per år.

De båda prognoserna beskrivs av funktionerna f och g, där x beskriver antalet år som gått sedan en insättning gjorts på respektive fondkonto.

Graferna till dessa funktioner visas i figuren nedan.



+15%/år

+10%/år

a) Ungefär hur stort är värdet hos fonderna efter 6 år om den årliga ökningen är 10 %? (1/0/0)

+10% ⇒ nedre grafen. $g(6) \approx 3600$ kr

(enligt grafen)

b) Ta fram ett funktionsuttryck för funktionen f (1/1/0)

Start = 2000

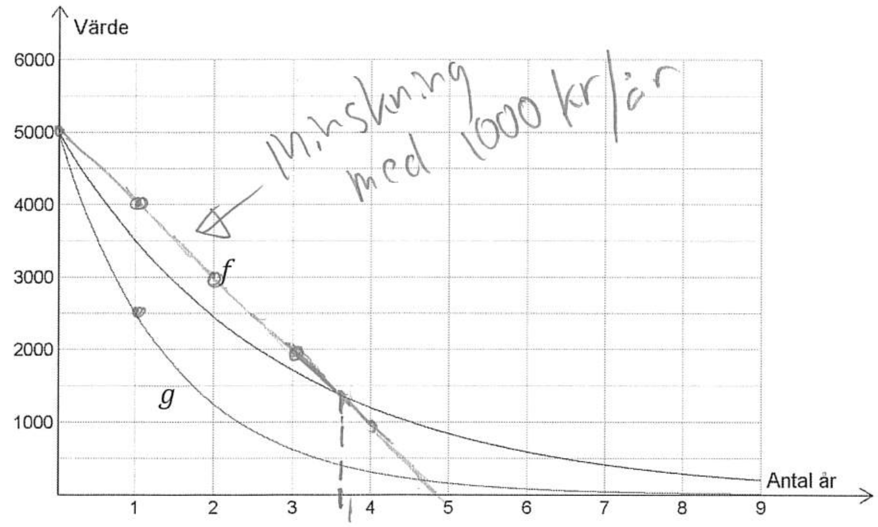
+15% ⇒ F = 1,15

$f(x) = 2000 \cdot 1{,}15^x$

c) Förklara vad lösningen till ekvationen $f(x) - g(x) = 4000$ innebär. (0/1/0)

"Efter hur många år är det 4000 kr mer enligt prognosen med +15 %/år jämfört med prognosen med +10%/år"

4. En TV köps för 5000 kr. TV:ns värde minskar sedan med 30 % per år.
Nedan visas graferna till två *exponentialfunktioner*.



a) Vilken av graferna visar bäst värdet av TV:n? (1/0/0)
Kortfattad motivering krävs!

f: 5000 kr → 3500 kr på ett år ⇒ $\frac{3500}{5000} = 0,7$
g: 5000 kr → 2500 kr på ett år ⇒ $\frac{2500}{5000} = 0,5$

f motsvarar en minskning på 30 %/år, vilket stämmer med TV:n

b) Anta att en annan prognos för TV:ns värde istället skulle vara en minskning med 1000 kr per år.
Efter hur många år skulle isf värdet av TV:n vara detsamma för de båda prognoserna? (0/1/0)

Minskning med 1000 kr/år ⇒ Rät linje.
Rita linjen i grafen och läs av ungefärlig skärningspunkt. ~ 3,6 år

c) Bestäm $f(2) - g(2)$. *Svara exakt!* (0/2/0)

$f(x) = 5000 \cdot 0,7^x$ $\quad f(2) = 5000 \cdot 0,7^2$
$g(x) = 5000 \cdot 0,5^x$ $\quad g(2) = 5000 \cdot 0,5^2$

$f(2) - g(2) = 5000 \cdot 0,7^2 - 5000 \cdot 0,5^2 =$
$= 5000 \cdot 0,49 - 5000 \cdot 0,25 =$
$= 2450 - 1250 = 1200$ kr

5. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Under år 1998 skickades 44 miljoner sms i Sverige. Under år 2012 skickades 16 514 miljoner sms. Anta att den årliga procentuella ökningen av antal sms per år har varit lika stor under hela tidsperioden.

Beteckna den årliga förändringsfaktorn med a. Teckna en ekvation med vars hjälp a kan beräknas.

Ex: $44 \cdot a^{14} = 16514$ (0/1/0)

"Start · För. faktor$^{\text{Antal år}}$ = Slut"

$44 \cdot a^{14} = 16514$

Antal år = 2012 − 1998 = 14
Start = 44
Slut = 16514

6. Antalet ljudböcker som finns tillgängliga på ett visst förlag har ökat från 400 stycken år 2013 till att år 2017 vara 2400 stycken.

Ställ upp en ekvation som kan användas för att bestämma vilket år det finns 6000 stycken ljudböcker där x är antalet år som gått sedan år 2013 (0/2/0)

"Start · För faktor$^{\text{Antal år}}$ = Slut" $\Rightarrow$ $400 \cdot a^4 = 2400$

$a^4 = \frac{2400}{400} = 6$

$a = \sqrt[4]{6}$

"Start · För. faktor^x = Slut" $\Rightarrow$

$400 \cdot (\sqrt[4]{6})^x = 6000$

7. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

I början av år 2011 köpte Matilda en dator för 10000 kr. Datorns värde kan beskrivas med $V(t) = 10000 \cdot 0{,}60^t$ där V är datorns värde i kr och t är tiden i år efter inköpet.

Teckna en ny funktion som anger datorns värde V i kr som funktion av tiden t, där tiden nu istället ska räknas i *månader* efter inköpet. (0/0/1)

0,60 = För. faktor på ett år

$\Rightarrow a^{12} = 0{,}60$ där a = För. faktor på en månad

$a = \sqrt[12]{0{,}60}$

$\Rightarrow V(t) = 10\,000 \cdot \left(\sqrt[12]{0{,}60}\right)^t = 10000 \cdot 0{,}60^{t/12}$

Del 2 – Med digitala hjälpmedel – Fullständiga uträkningar krävs!

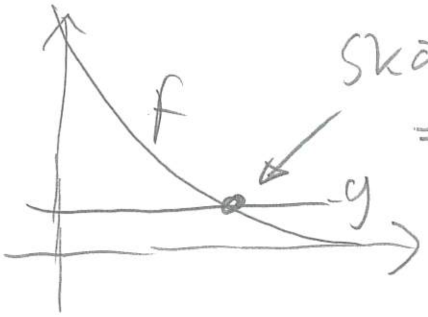
D1. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Karin köper en ny dator. Datorns värde V kr förväntas minska enligt modellen $V = 8000 \cdot 0{,}67^t$ där t är antal år efter inköpet.

Efter hur lång tid har datorns värde minskat till en fjärdedel av värdet vid inköpet? (2/0/0)

$f = 8000 \cdot 0{,}67^x$ $\Rightarrow$

$g: y = 2000$



Skärning (f, g)

$\Rightarrow (3{,}46; 2000)$

$\Rightarrow$ Efter 3,5 år.

Även "Lös$(8000 \cdot 0{,}67^x = 2000)$" funkar

$\Rightarrow x \approx 3{,}5$ år

D2. Värdet av en viss skivsamling väntas följa prognosen

$V(x) = 15500 \cdot 1{,}34^x$

Där V är värdet i kronor x år efter år 2012

a) Vad var skivsamlingens värde år 2014? (1/0/0)

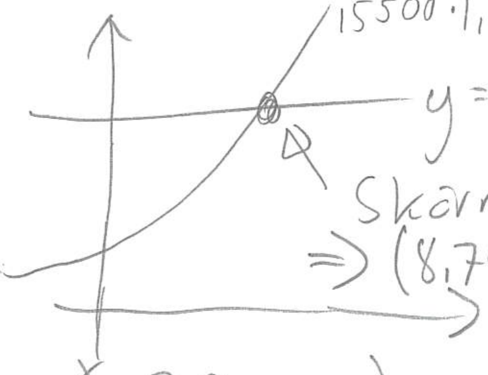
2014 $\Rightarrow$ 2 år efter 2012

$\Rightarrow V(2) = 15\,500 \cdot 1{,}34^2 \approx 27\,800$ kr

b) Under vilket år väntas skivsamlingens värde överstiga 200 000 kr? (1/1/0)

Vill lösa $V(x) = 200000$

Antingen med skärning:



$15500 \cdot 1{,}34^x$

$y = 200000$

Skärning

$\Rightarrow (8{,}74; 200000)$

eller via Lös$(15500 \cdot 1{,}34^x = 200\,000)$

$\Rightarrow x \approx 8{,}74$

$\Rightarrow$ År $2012 + 8{,}74 = 2020{,}74$

$\Rightarrow$ Under år 2020

D3. Antalet utövare av en viss idrott har ökat från 12 000 utövare år 1995 till 45 000 utövare år 2010.

Med hur många procent har antalet utövare ökat i **genomsnitt per år** under perioden 1995 till 2010? (1/1/0)

För "hand" el. via RegressionExp:

Start: 12000

Slut: 45000

Antal år: 2010−1995: 15

$12000 \cdot x^{15} = 45000$

$\Rightarrow x = \sqrt[15]{3{,}75} \approx 1{,}092$

$A = (0, 12000)$

$B = (15, 45000)$

$\text{RegressionExp}(A, B) \Rightarrow 12000 \cdot 1{,}092^x$

$+9{,}2\%/\text{år}$

D4. Antalet nedladdningar av en viss app ökade från under ett år enligt:

1 januari – 42 000 st

1 maj – 322 016 st

a) Med hur många procent ökade antalet nedladdningar i **genomsnitt per månad** under perioden januari till maj? (1/1/0)

För "hand" el. via RegressionExp

$42000 \cdot x^4 = 322016$

$\Rightarrow x \approx 1{,}664$

$A = (0, 42000)$

$B = (4, 322016)$

$\text{RegressionExp}(A, B) \Rightarrow 42000 \cdot 1{,}664^x$

$+66{,}4\%/\text{mån}$

b) Anta att samma procentuella ökning per månad fortsätter även efter 1 maj. Vilken månad väntas i så fall antalet nedladdningar överstiga 2 000 000 st? (0/2/0)

Vill lösa ekv $42000 \cdot 1{,}664^x = 2000\,000$

Skärning el Lös $\Rightarrow x \approx 7{,}6 \Rightarrow$ 7,6 månader efter Januari

Jan	Feb	Mar	Apr	Maj	Jun	Jul	Aug
0	1	2	3	4	5	6	7

$\Rightarrow$ 1 Augusti

D5. Antalet av ett visst utrotningshotat djur har gått från 5000 individer år 1970 till 800 individer år 2000.

Anta att samma genomsnittliga procentuella minskning per år fortsatt även efter år 2000.

Hur många djur väntas finnas år 2025? (0/3/0)

År 1970 2000
x : 0 30
Antal: 5000 800

$\Rightarrow$ A = (0, 5000)
B = (30, 800)

RegressionExp(A, B) $\Rightarrow$
$f(x) = 5000 \cdot 0{,}941^x$

År 2025 $\Rightarrow$ x = 55
f(55) = 174 st

D6. En lägenhet, A, såldes år 2005 för 800 000 kr.
År 2014 var samma lägenhet värd 1 200 000 kr.
Anta att det värdet årligen ökat med **lika många procent** under hela tidsperioden, och även fortsätter att göra det.

a) Bestäm vilket år värdet på lägenheten väntas passera 2 500 000 kr. (0/3/0)

År: 2005 2014
x : 0 9
Värde: 800000 1200000

$\Rightarrow$ A = (0, 800 000)
B = (9, 1200 000)

RegressionExp(A, B)
$\Rightarrow f(x) = 800000 \cdot 1{,}046^x$

"Värdet passera 2500 000"
$\Rightarrow$ Vill lösa ekv: f(x) = 2500 000

Skärning el Lös $\Rightarrow$ $x \approx 25{,}3$ $\Rightarrow$
År 2005 + 25 = 2030

b) En annan lägenhet, B, var år 2005 värd 1 500 000 kr och år 2014 hade värdet ökat till 2 040 000 kr.

Utgå från att värdet på lägenheten årligen fortsätter öka med **lika många kronor** även fortsättningsvis.

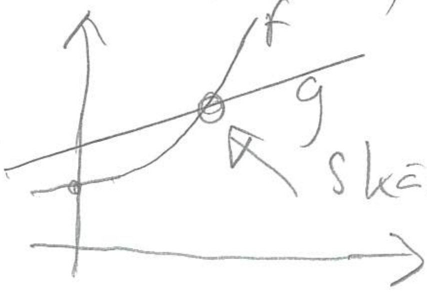
Vilket år i framtiden väntas de båda lägenheterna A och B vara värda lika mycket? (0/1/1)

Lika många kronor $\Rightarrow$ Linjärt:

År: 2005 2014
x: 0 9
Värde: 1500000 2040000

$\Rightarrow$ A = (0, 1500 000)
B = (9, 2040 000)

RegressionLin(A, B) $\Rightarrow$
$g(x) = 60000x + 1500000$



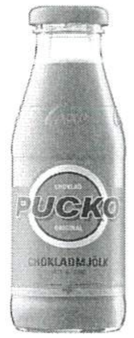
Skärning(f, g) $\Rightarrow$ (32,4 ; 3444 223)
$\Rightarrow$ År 2037

D7. Sture Storfräs har sparat pengar på ett aktiekonto.

Han satte 1:a Januari år 2005 in 100 000 kr på kontot och
1:a Januari år 2016 var saldot 160 000 kr.

Anta att den procentuella ökningen varit lika stor under hela tidsperioden,
och även fortsätter vara lika stor.

År 2005 bodde i Stures samhälle 20 000 människor.
Anta att antalet människor i Stures samhälle ökar med 300 personer varje år.



Sture är mycket uppskattande till chokladdrycken PUCKO,
och har en dröm - *"PUCKO für Alle"* – att hans fondkonto bekostar
en PUCKO till alla i samhället.

Anta att priset på PUCKO är konstant 12 kr under alla år.

Under vilket år kommer Stures fondkonto kunna användas till att
köpa en PUCKO till varje invånare samhället? (0/1/3)

År: 2005 2016
x: 0 11 $\Rightarrow$ $A = (0, 100\,000)$
värde: 100000 160000 $B = (11, 160\,000)$

Regression Exp(A,B) $\Rightarrow$ $f(x) = 100\,000 \cdot 1{,}04365^x$
= Värdet på kontot

År 2005 2006
x: 0 1 $\Rightarrow$ $C = (0, 20000)$
Antal: 20000 20300 $D = (1, 20300)$

Regression Lin (C,D) $\Rightarrow$ $g(x) = 20000 + 300x$
= Antal invånare

Puckokostnaden = Antal invånare · 12 = $12 \cdot g$ =
$= 12(20000 + 300x)$

"Värdet på kontot = Puckokostnaden" $\Rightarrow$ Vill lösa: $f = 12 \cdot g$
Lös el. Skärning $\Rightarrow$ $x \approx 28{,}9$
$\Rightarrow$ År 2033 (Nästan 2034)