

FACIT

2.4 Andragradsfunktioner - teori

Del 1 – Utan digitala verktyg

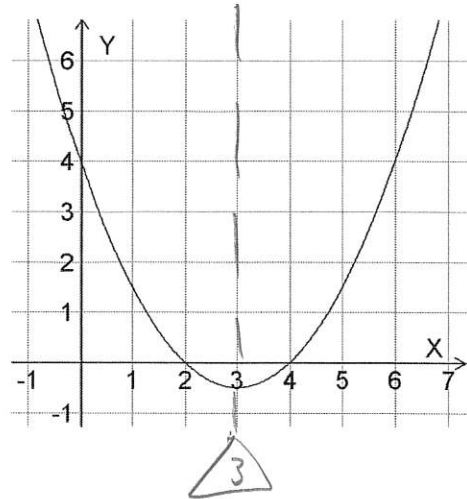
1. Grafen till en andragradsfunktion visas till höger.

a) Ange funktionens nollställen (1/0/0)

"x-värdena där grafen skär x-axeln" $x_1 = 2$ $x_2 = 4$

b) Ange symmetrilinjens ekvation. (1/0/0)

"Det x-värde där grafen är speglad" $x = 3$



c) Funktionen kan skrivas på formen $y = ax^2 + bx + c$

Bestäm värdet av konstanten c

(1/0/0)

"Skärningen med y-axeln" $c = 4$

2. a) Skissa i koordinatsystemet nedan grafen till **valfri** andragradsfunktion som uppfyller följande tre villkor:

(2/0/0)

siffran framför x^2 -termen är negativ

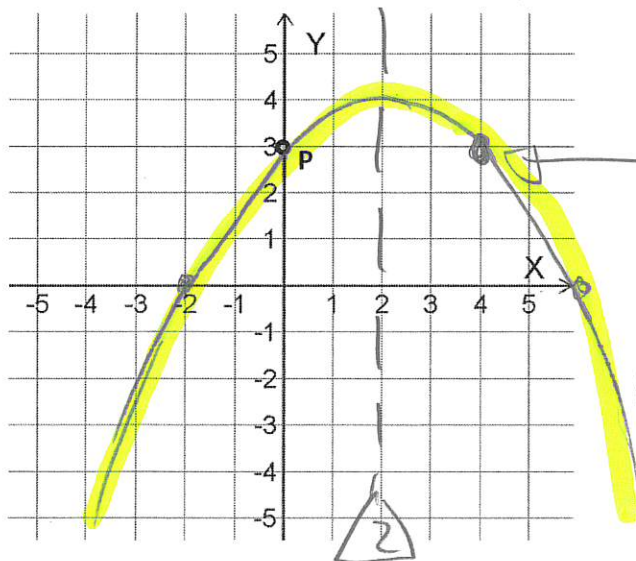
\Rightarrow \cap "sur"

symmetrilinjen är vid $x = 2$

\Rightarrow Mittan vid $x = 2$

punkten P ligger på grafen

\Rightarrow Punkten $(4, 3)$ ligger också på grafen



Symmetripunkt till P

exempelvis

b) Andragradsfunktionen kan skrivas på formen $y = ax^2 + bx + c$.

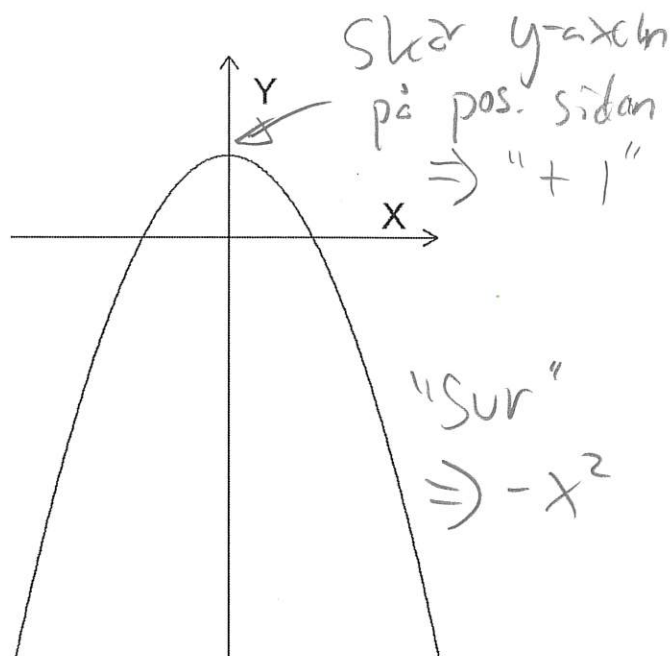
Bestäm värdet av konstanten c

(1/0/0)

"Skärningen med y-axeln" $c = 3$
(y-värdet hos P)

3. Till höger visas grafen till andragradsfunktionen f .
Ett av alternativen A – F nedan visar funktionsuttrycket till f
Vilket av alternativen är det? (1/0/0)

- A $f(x) = x^2 - 1$
B $f(x) = -x^2$
C $f(x) = x^2 + 1$
D $f(x) = -x^2 - 1$
E $f(x) = x^2$
F $f(x) = -x^2 + 1$



4. Utgå från funktionen $f(x) = 2x^2 + 8x - 10$

- a) Bestäm koordinaterna för *valfri punkt* på funktionens graf (1/0/0)

Velj valfritt x -värde, ex $x=2$, och beräkna $f(2)$
 $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 10$
 $= 8 + 16 - 10 = 14$
 ex: $(2, 14)$

- b) Bestäm ekvationen för *symmetrilinjen* till f (1/0/0)

Symmetrilinjen = " \triangle " i pq
 $\frac{2x^2 + 8x - 10}{2} = x^2 + 4x - 5 \Rightarrow$ pq: $\triangle -2$ $\underline{\underline{2 \cdot 2 + 5}}$
 $x = -2$

- c) Bestäm *nollställena* till funktionen f (2/0/0)

Nollställena är de 2 x -värdena i pq.
 $x^2 + 4x - 5 = 0$ pq: $\triangle -2$ $\underline{\underline{2 \cdot 2 + 5 = 9}} \Rightarrow \boxed{3}$
 $x_1 = \triangle -2 + \boxed{3} = 1$ $x_2 = \triangle -2 - \boxed{3} = -5$

- d) Bestäm funktionens *minsta värde* (0/1/0)

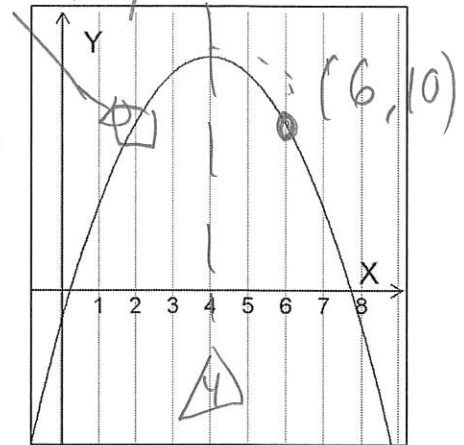
Minsta värdet är y -värdet vid symmetrilinjen,
 dvs $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 10 =$
 $= 2 \cdot 4 - 16 - 10 = 8 - 26 = -18$

5. Grafen till en andragradsfunktion visas till höger.

Ett x -värde som har y -värdet 10 är $x = 6$.

Ange ytterligare ett x -värde som har y -värdet 10 (1/0/0)

Symmetripunkt



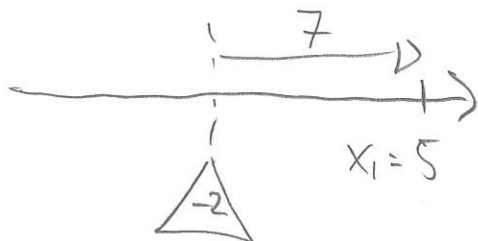
Grafen symmetrisk kring $x=4$
 \Rightarrow Det finns en punkt till
 vänster om $x=4$
 \Rightarrow $x=2$

6. För en andragradsfunktion gäller att:

Funktionens symmetrilinje är på $x = -2$.

Funktionens ena nollställe är på $x = 5$.

Bestäm funktionens andra nollställe.



7 steg åt höger (1/0/0)

\Rightarrow Andra ligger 7 steg
 åt vänster.

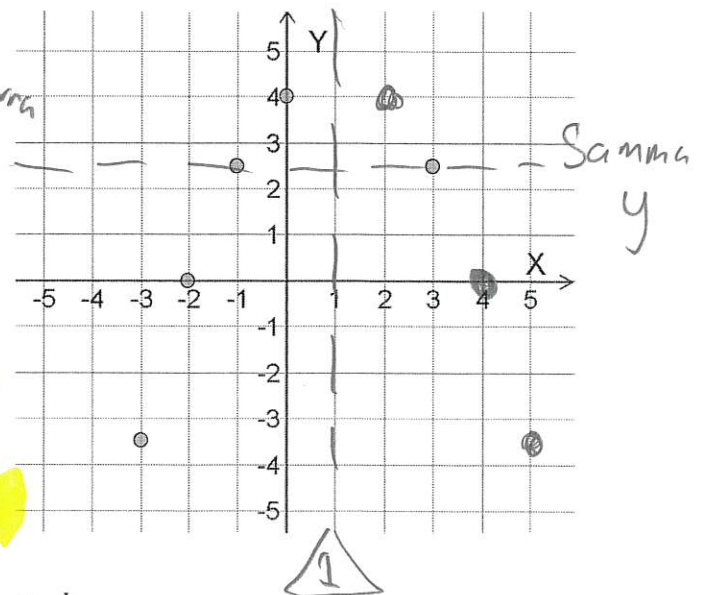
$x_2 = -2 - 7 = -9$

7. I figuren visas ett antal punkter som ligger på grafen till andragradsfunktionen f .

a) Ange symmetrilinjens ekvation. (1/0/0)

Mitt emellan de båda punkterna
 med samma y :

$x = 1$



b) Ange funktionens nollställen. (1/0/0)

Ena nollstället givet: $x_1 = -2$
 Andra fås med
 symmetri: $x_2 = 4$

c) Funktionsuttrycket till f kan skrivas $f(x) = -0,5 \cdot a \cdot b$

Bestäm faktorerna a och b (0/2/0)

a och b motsvarar de båda () som
 hör ihop med nollställena, dvs
 $x_1 = -2 \Rightarrow a = (x + 2)$
 $x_2 = 4 \Rightarrow b = (x - 4)$
 (vilken som är a
 och b spelar eq.
 ingen roll)

8. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = (x-4)(x-8)$

a) Ange koordinaterna för en punkt som ligger på funktionens graf.

ex: $(4, 0)$ (1/0/0)

b) För vilket värde på x har funktionens graf en minimipunkt?

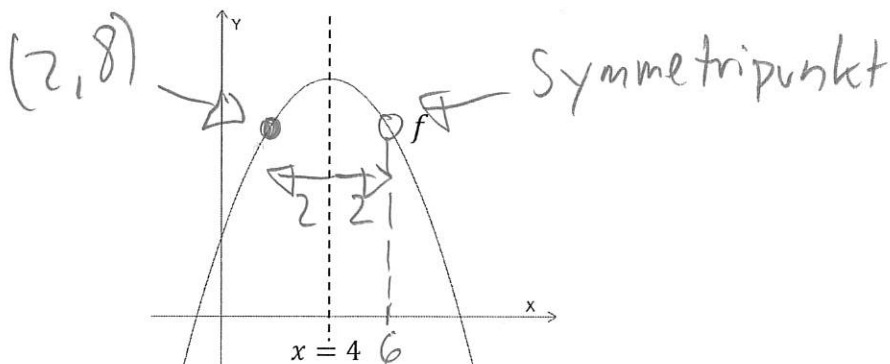
$x = 6$ (0/1/0)

a) Välj valfritt x -värde
ex: $x = 4$.
Beräkna $f(4) \Rightarrow$
 $(4-4)(4-8) = 0$

b) Minipunkten fås vid symm. linjen, dvs mitt emellan nollställena $(x-4)(x-8) = 0$
 $x_1 = 4$ $x_2 = 8$

9. Figuren nedan visar grafen till en andragradsfunktion, f , med symmetrilinje vid $x = 4$.

Funktionen kan skrivas på formen $f(x) = \square x^2 + 4x \square$



a) Punkten $(2, 8)$ ligger på grafen. Ange ytterligare en punkt som ligger på grafen. (1/0/0)

Symmetri vid $x = 4 \Rightarrow$ En punkt på varsin sida om $x = 4$, med samma y -värde.
 $(6, 8)$

b) I funktionsuttrycket har två siffror täckts över. Avgör med hjälp av grafen

för vart och en av dessa båda övertäckningar om siffran som täckts

över är ett **positivt** eller ett **negativt** tal

(2/0/0)

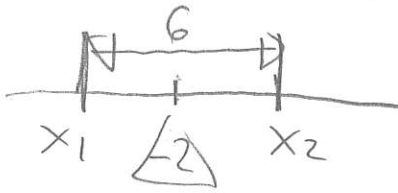
$\square \Rightarrow$ Negativt, pga grafen är "ledsen"

$\square \Rightarrow$ Positivt, pga skärningen med y -axeln är på plussidan.

10. För en andragradsfunktion gäller att symmetrilinjen är på $x = -2$.
Avståndet mellan de båda nollställena är 6.

Bestäm funktionens största nollställe.

(0/1/0)

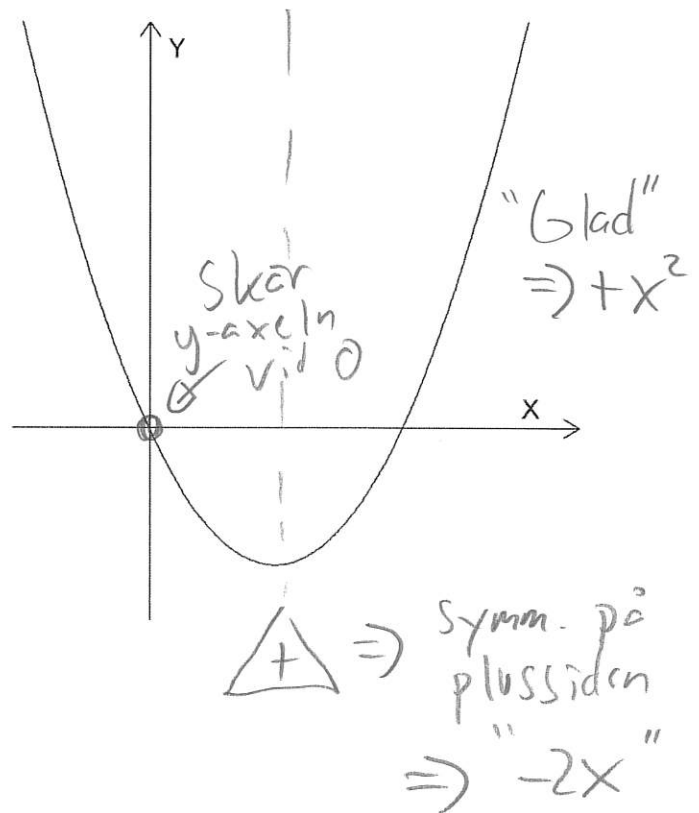


6 steg mellan nollställena
 \Rightarrow 3 steg åt resp håll
 $\Rightarrow x_1 = -2 - 3 = -5$
 $x_2 = -2 + 3 = 1$ \leftarrow Störst.

11. Till höger visas grafen till andragradsfunktionen f .

Ett av alternativen A – H nedan visar
funktionsuttrycket till f
Vilket av alternativen är det?

- A $-x^2 + 2x$
- B $-x^2 - 2x$
- C $-x^2 + 2x + 1$
- D $-x^2 + 2x - 1$
- E $x^2 - 2x$**
- F $x^2 + 2x$
- G $x^2 + 2x + 1$
- H $x^2 + 2x - 1$



12. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

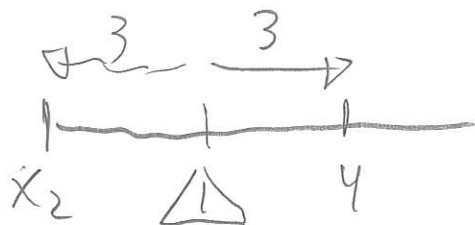
För en andragradsfunktion gäller:

- Funktionen har ett nollställe för $x = 4$
- Funktionen har sitt största värde för $x = 1$

Störst värde finns vid
symm. linjen \Rightarrow \triangle

För vilket värde på x har funktionen sitt andra nollställe?

$x = -2$ (0/1/0)



3 steg åt höger \Rightarrow
 Andra är 3 steg åt vänster:
 $x_2 = 1 - 3 = -2$

13. Skissa ett ungefärligt utseende på grafen till funktionerna.
Använd alla kunskaper om funktion-graf-relationen, d.v.s. både "max/min", symmetrilinjen, symmetriegenskaper i allmänhet samt skärningspunkt med y-axeln.

a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ (1/2/0)

"Ledsen"

Delat med: $x^2 + 2x - 3$

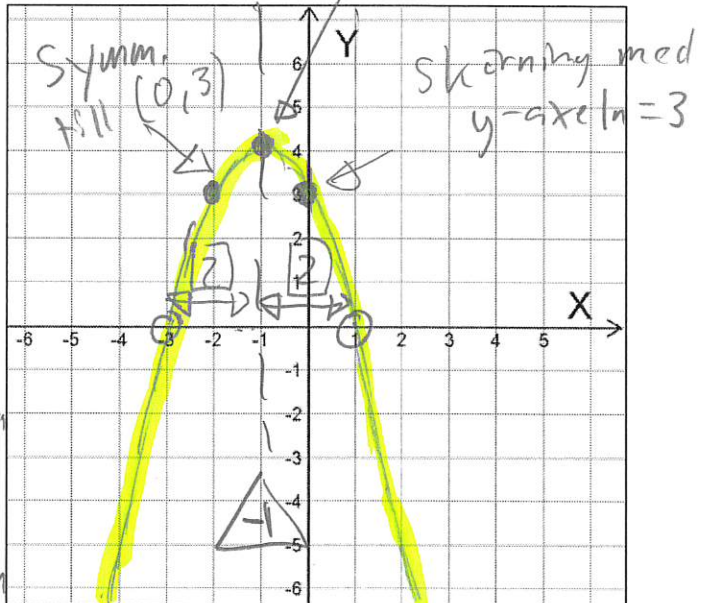
Pq: $\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 1 & 1+3=4 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 2$

Symm.

Antal steg till nollställen

Högsta värde: $f(-1) = -1 + 2 + 3 = 4$

Skär y-axeln vid 3



b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$ (1/2/0)

"Blad"

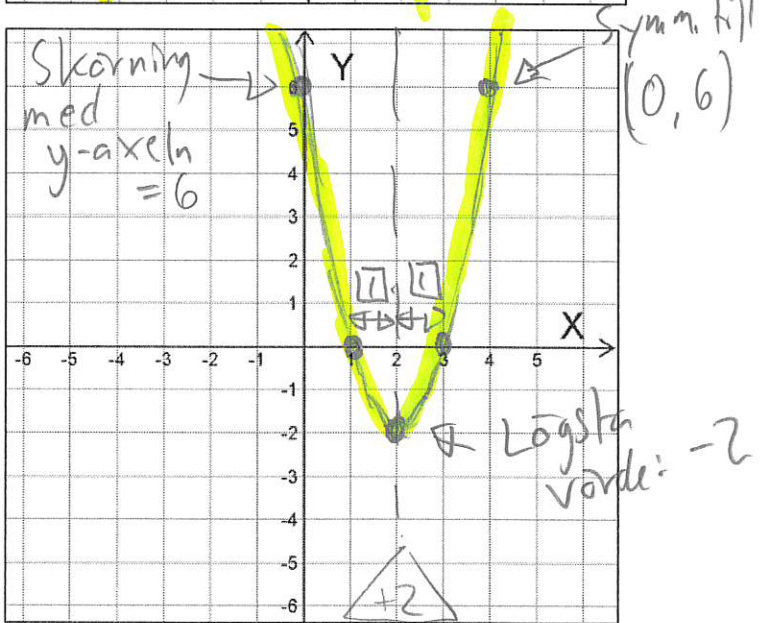
Delat med 2: $x^2 - 4x + 3$

Pq: $\begin{array}{|c|c|c|} \hline +2 & 2 & 2-3=1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 1$

Symm.

Lägstvärde: $f(2) = 8 - 16 + 6 = -2$

Symm. till (0, 6)



14. Figuren visar delar av grafen till andragradsfunktionen f .

Funktionen kan skrivas på formen

$f(x) = -0,4 \cdot a \cdot b$

Bestäm faktorerna a och b

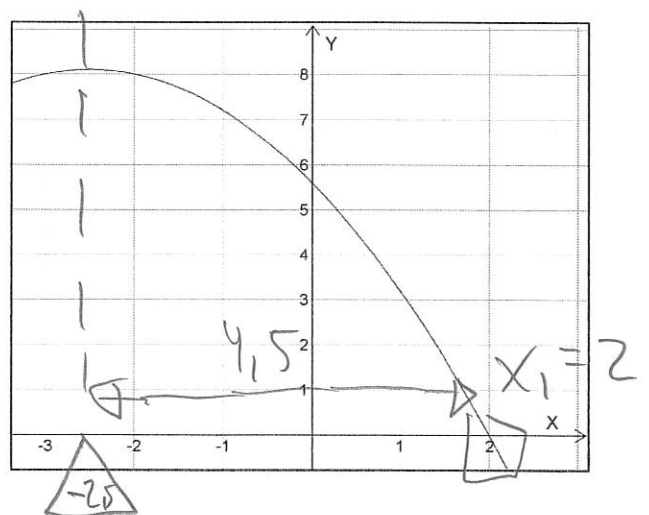
(0/2/0)

a och b motsvarar () till resp. nollställe.

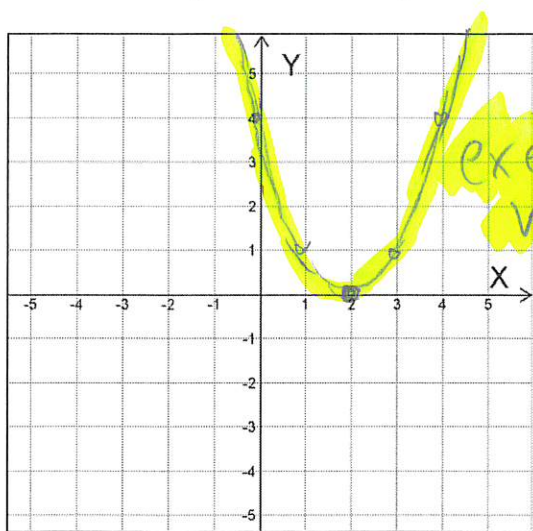
$x_1 = 2 \Rightarrow a = (x - 2)$

$x_2 = -2,5 - 4,5 = -7 \Rightarrow b = (x + 7)$

(symmetri)



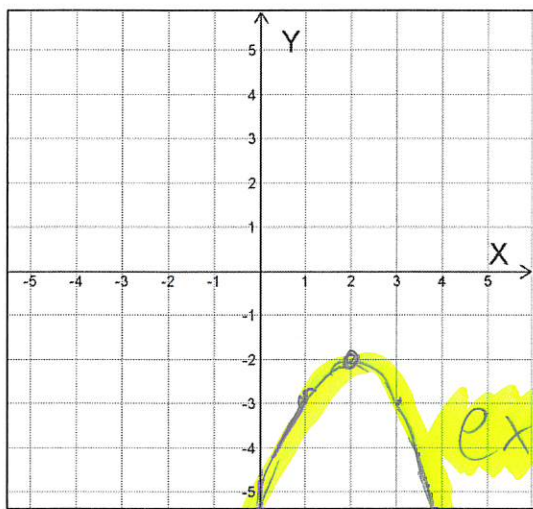
15. Rita i koordinatsystemen nedan grafen till en andragradsfunktion som...



exempelvis Grafen vänder på x-axeln

a) ...endast har ett reellt nollställe (s.k "dubbelrot")

(0/1/0)



Grafen vänder utan att skära x-axeln

exempelvis

b) ...har komplexa nollställen

(0/1/0)

16. Undersök hur ^{reella} antalet nollställen hos funktionen f varierar med värdet på konstanten c om $f(x) = -0,5x^2 + 2x + c$

(0/3/0)

Dela med $-0,5$: $x^2 - 4x + 2c$

$$p\ q: \quad \triangle +2 \quad 2 \cdot 2 + 2c = \sqrt{4 + 2c}$$

Om $\sqrt{\quad} = 0$ finns ett nollställe: $4 + 2c = 0$
 $c = -2$

Om $\sqrt{\quad} > 0$ finns två nollställen: $4 + 2c > 0$
 $c > -2$

Om $\sqrt{\quad} < 0$ finns inga nollställen: $4 + 2c < 0$
 $c < -2$

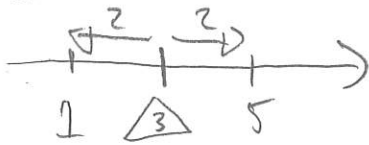
17. Andragradsfunktionen f har sitt största värde i punkten $(3,10)$.

Ett av dess nollställen är vid $x = 5$

Bestäm funktionsuttrycket för f .

(0/1/2)

Största värde vid $(3,10) \Rightarrow$ symm. vid $x=3$



Nollställen vid $x_1=1 \Rightarrow (x-1)$
 $x_2=5 \Rightarrow (x-5)$

$$f(x) = a \cdot (x-1)(x-5)$$

$$f(x) = -2,5(x-1)(x-5)$$

Punkten $(3,10) \Rightarrow a \cdot (3-1) \cdot (3-5) = 10$

$$a \cdot (2) \cdot (-2) = 10$$

$$a = \frac{10}{-4} = -2,5$$

18. Figuren visar andragradsfunktionen f .

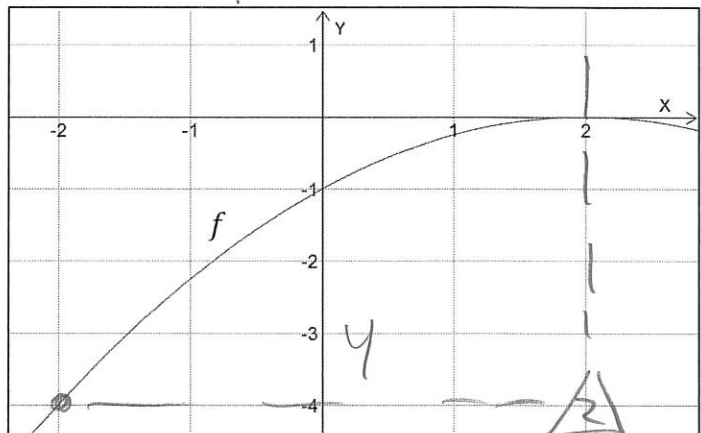
a) Hitta den positiva lösningen

till ekvationen $f(x) = -4$ (0/1/0)

Symm. linje vid $x=2$

4 steg åt resp. håll

$$x = 2 + 4 = 6$$



b) Ta fram ett funktionsuttryck för $f(x)$

(0/0/2)

Dubbelrot vid $x=2 \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-2)(x-2)$

Punkten $(0, -1) \Rightarrow a \cdot (0-2)(0-2) = -1$

$$a \cdot (-2) \cdot (-2) = -1$$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2$$

Del 2 – Med digitala verktyg

D1. För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = 2,5x^2 - 4x - 6$

a) Bestäm $f(3,5)$ Skriv in funktionen (1/0/0)

Skriv " $f(3,5)$ " \Rightarrow 10,63

b) Bestäm funktionens nollställen (1/0/0)

Skärning $(f, 0) \Rightarrow$ $x_1 \approx -0,94$
 $x_2 \approx 2,54$

c) Lös ekvationen $f(x) = 2$ (1/0/0)

Antingen "Lös($f=2$)"
eller " $y=2$ " Skärning \Rightarrow $x_1 \approx -1,16$
 $x_2 \approx 2,76$

d) Bestäm funktionens minsta värde. (2/0/0)

"Extrempunkt(f)" \Rightarrow $(0,8; -7,6)$
 \Rightarrow Minsta värde = $-7,6$
(endast y -värdet)

D2. Bestäm symmetrilinjen till funktionen $f(x) = -5x^2 + (x - 4)^2$ (2/0/0)

Skriv in funktionen. \Rightarrow

A) \rightarrow
Ta fram extrempunkts
 x -värde.

Extrempunkt(f)
 \Rightarrow $(-1, 20)$

\Rightarrow Symm: $x = -1$

B) \rightarrow

Tänk:
 x -värdet mittemellan nollställens

Nollställen: $x_1 \approx -3,24$
 $x_2 \approx 1,24$

Mittemellan: $\frac{-3,24 + 1,24}{2}$
 \Rightarrow $x = -1$



D3. Undersök om det finns någon punkt på funktionen $f(x) = -2x^2 - 6,16x + 4,2$ som har y-värdet 9

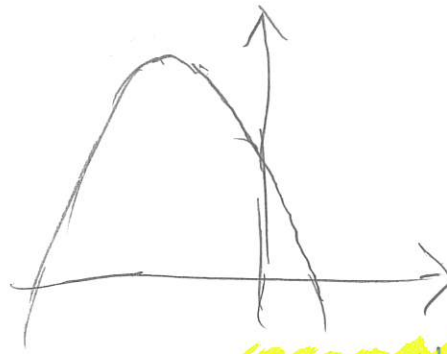
(0/2/0)

Skriv in funktionen:

Extrempunkt (f)

$$\Rightarrow (-1,54 ; 8,94)$$

$$\Rightarrow \text{Största värdet } 8,94 \Rightarrow$$



Inga punkter har högre y-värde än 8,94 \Rightarrow Nej, ingen punkt med y-värdet 9

D4. För andragradsfunktionen f gäller att $f(x) = -25x^2 + 30x + c$ där c är en konstant

a) Bestäm valfritt värde på konstanten c så att funktionen får komplexa nollställen

(0/1/0)

Komplexa nollställen \Rightarrow Grafen skär aldrig x-axeln.

Alla c -värden lägre än -9 funkar.

$$\text{ex: } c = -10$$

b) För ett visst värde på c har funktionen största värdet 100.

Bestäm det värdet på konstanten c .

(0/2/0)

Om $c = 0 \Rightarrow$ Högsta värdet = 9 (extrempunkt)

Om största värdet ska bli 100 \Rightarrow Upphissning med 91 steg $\Rightarrow c = 91$

D5. Andragradsfunktionen f går igenom punkterna $(2,5)$, $(3,12)$ och $(-4,2)$

Bestäm koordinaterna för de punkter där grafen till f skär koordinataxlarna.

(0/3/0)

Skriv in punkterna: $A = (2,5)$
 $B = (3,12)$
 $C = (-4,2)$

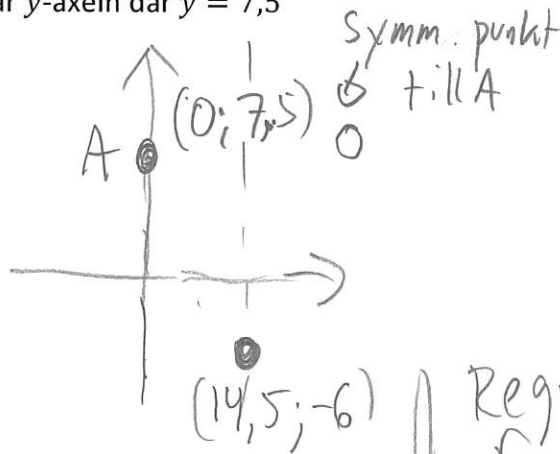
Regression Poly $(A, B, C) \Rightarrow f = 0,93x^2 + 2,36x - 3,43$

Skärning med \Rightarrow Skärning $(f, 0)$ $\Rightarrow (-3,57; 0)$
 axlarna \Rightarrow Skärning $(f, y\text{-axeln})$ $\Rightarrow (1,03; 0)$
 $(0; -3,43)$

D6. Bestäm nollställena till den andragradsfunktion som har sitt minsta värde i punkten $(14,5; -6)$ samt korsar y -axeln där $y = 7,5$

(0/2/1)

Ritas den givna infon upp för



$A = (0; 7,5)$
 $B = (14,5; -6)$
 $C = (29; 7,5)$

Symmetrilinjen:

$$x = 14,5$$

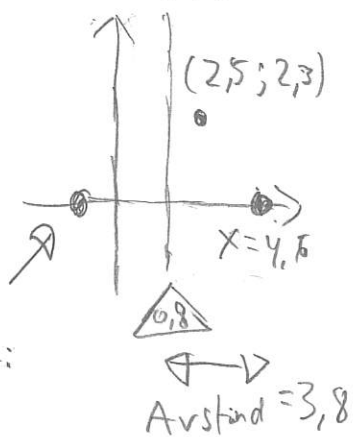
$\Rightarrow (0, 7,5)$ har en symm. punkt på $(29; 7,5)$ \Rightarrow Regression Poly \Rightarrow
 $f = 0,06x^2 - 1,86x + 7,5$
 \Rightarrow Nollstellen: $x_1 \approx 4,83$
 $x_2 \approx 24,17$

D7. Andragradsfunktionen f går igenom punkten $(2,5; 2,3)$ och har en symmetrilinje på $x = 0,8$ samt ett nollställe på $x = 4,6$.

Lös ekvationen $f(x) = -3$

(0/1/2)

Rita upp:



Andra nollstället:
 $0,8 - 3,8$
 $= -3$

Tre punkter: $A = (-3, 0)$
 $B = (2,5, 2,3)$
 $C = (4,6, 0)$

Regression Poly $(A, B, C) \Rightarrow$
 $f(x) = -0,2x^2 + 0,32x + 2,75$

Lös $(f = -3) \Rightarrow x_1 \approx -4,63$
 eller skärning med $y = -3$ $x_2 \approx 6,23$