

# FACIT

## 2.1 Algebra

### Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Utveckla parenteserna och förenkla uttrycket  $(x+3)(x-2)$  så långt som möjligt.

(1/0/0)

"Alla hälsar på varandra"  $\Rightarrow (x+3)(x-2) = x \cdot x - 2 \cdot x + 3 \cdot x - 6$   
 $= [x \cdot x = x^2] = x^2 + 1x - 6$

2. Förenkla uttrycket  $(x-2)(2+x) + 4$  så långt som möjligt.

(1/0/0)

$(x-2)(2+x) + 4 = 2x + x^2 - 4 - 2x + 4 = x^2$

Kan också skrivas  
som  $(x-2)(x+2)$  och  
konjugatregeln kan  
användas

$$\Rightarrow (x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow (x-2)(2+x) + 4 = x^2 - 4 + 4 = x^2$$

3. Förenkla uttrycket  $(x-3)^2 + 4x - 2x^2$  så långt som möjligt.

(2/0/0)

1) Skriv om  $(x-3)^2$  som  $(x-3)(x-3)$  och gånger "manuellt"  
 $(x-3)(x-3) + 4x - 2x^2 = x^2 - 3x - 3x + 9 + 4x - 2x^2 = -x^2 - 2x + 9$

2) Utveckla  $(x-3)^2$  mha kvadreringsregel

$$(x-3)^2 + 4x - 2x^2 = x^2 - 6x + 9 + 4x - 2x^2 = -x^2 - 2x + 9$$

4. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

(1/0/0)

Förenkla  $(x+5)^2 - 10x$  så långt som möjligt.

1.)  $(x+5)^2 = (x+5)(x+5) = x^2 + 5x + 5x + 25 = x^2 + 10x + 25$

2.) kvadreringsregel:  $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25$

$\Rightarrow (x+5)^2 - 10x = x^2 + 10x + 25 - 10x = x^2 + 25$

5. Mattias försöker lösa nedanstående matteuppgift:

"Förenkla  $(x + 3)^2$  så långt som möjligt"

Mattias lösning visas till höger, men lösningen är tyvärr felaktig.

$$(x+3)^2 = x \cdot x + 3 \cdot 3 = 2x + 9$$

Vilka fel finns i lösningen?

(2/0/0)

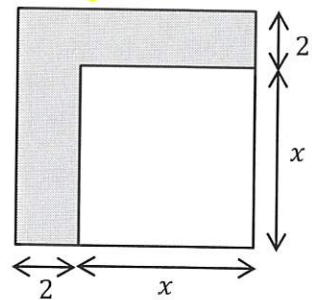
Mattias har fel i att  $(x+3)^2$  innebär  $x \cdot x + 3 \cdot 3$ . Istället gäller  $(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = x^2 + 6x + 9$

Dessutom är inte  $x \cdot x = 2x$  utan  $x^2$

6. Till höger visas två kvadrater där den ena är inuti den andra.

Den större kvadraten har sidan  $x + 2$  och den mindre har sidan  $x$ .

Ta fram ett förenklat uttryck för det markerade området. (2/0/0)



$$\text{L-shaped area} = \text{square } (x+2) \times (x+2) - \text{square } x \times x =$$

$$= (x+2)^2 - x^2 = \left[ \begin{array}{l} (x+2)^2 = (x+2)(x+2) \\ \text{eller} \\ \text{kvadreringsregeln} \end{array} \right] =$$

$$= x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4 \quad (\text{kan också lös på annat sätt})$$

7. Förenkla uttrycket  $2(x+4)^2 - 3(x-2)(x+2)$  så långt som möjligt.

(1/1/0)

$$2(x+4)^2 - 3(x-2)(x+2) = \left[ \begin{array}{l} (x+4)^2 = (x+4)(x+4) \\ \text{el.} \\ \text{kvadreringsregeln} \end{array} \right] = 2(x^2 + 8x + 16) - 3(x-2)(x+2)$$

$$= \left[ \begin{array}{l} (x-2)(x+2) = x^2 - 4 \\ \text{konjugatregeln} \end{array} \right] = 2(x^2 + 8x + 16) - 3(x^2 - 4) = \left[ \begin{array}{l} \text{Gånger in} \\ \text{siffrorna} \\ \text{OBS! Tänk} \\ \text{på tecknen!} \\ -3 \cdot -4 = +12 \end{array} \right] = 2x^2 + 16x + 32 - 3x^2 + 12 = x^2 + 16x + 44$$

8. Ge förslag på vad som ska stå i de tomma parenteserna för att likheten ska gälla

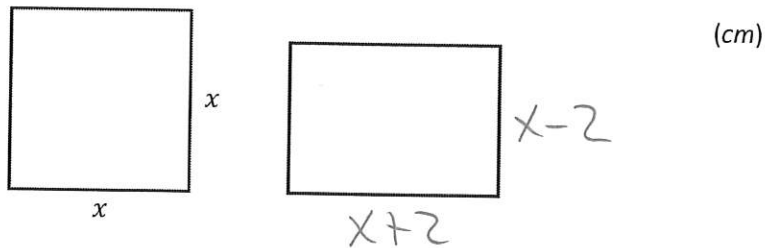
$$(9 + 3x)(9 - 3x) = 81 - 9x^2$$

$$(9 + 3x)(9 - 3x)$$

Konjugattänk baklänges.  
 $ngt^2 = 81 \Rightarrow 9$  ( $9 \cdot 9 = 81$ )  
 $ngt^2 = 9x^2 \Rightarrow 3x$  ( $3x \cdot 3x = 9x^2$ )

9. Figuren nedan visar två figurer - en kvadrat med sidan  $x$  - och en rektangel där en sida är 2 cm längre än kvadratens och en sida är 2 cm kortare än kvadratens.

En elev påstår att areorna hos de båda figurerna borde vara lika stora eftersom långsidan ökar med lika mycket som kortsidan minskas med.



Undersök om eleven har rätt.

(1/1/0)

Arean hos kvadraten =  $x^2$

Arean hos rektangeln =  $(x+2) \cdot (x-2) = \left[ \begin{array}{l} \text{konjugat} \\ \text{regeln} \end{array} \right] = x^2 - 4$

⇒ Eleven har fel. Rektangeln är  $4 \text{ cm}^2$  mindre än kvadraten

10. Förenkla uttrycket nedan så långt som möjligt.

(0/2/0)

$$\frac{(10x+5)^2 + 2(5-10x)}{5} = \left[ (10x+5)^2 = 100x^2 + 100x + 25 \right] =$$

$$= \frac{100x^2 + 100x + 25 + 2(5-10x)}{5} = \left[ \begin{array}{l} \text{Gånger in} \\ 2: \text{en} \end{array} \right] =$$

$$= \frac{100x^2 + 100x + 25 + 10 - 20x}{5} = \frac{100x^2 + 80x + 35}{5} = 20x^2 + 16x + 7$$

11. Visa att alla jämna tal i kvadrat kommer vara delbara med fyra.

(0/2/0)

Ett jämnt tal kan alltid skrivas som 2 ggr ett heltal, ex  $6 = 2 \cdot 3$  el.  $46 = 2 \cdot 23$

⇒ Alla jämna tal =  $2 \cdot x$

$(\text{Alla jämna tal})^2 = (2 \cdot x)^2 = 4x^2$ , vilket går att dela med 4 VSV.

12. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

(0/2/0)

Förenkla uttrycket  $\frac{a^2 - 2b}{4}$  så långt som möjligt om  $a = 2x + 1$   
och  $b = 2x - 1,5$

Tänk alltid ( ) runt uttryck  $\Rightarrow a = (2x + 1)$   
 $b = (2x - 1,5)$

$$\begin{aligned}\frac{a^2 - 2b}{4} &= \frac{(2x+1)^2 - 2(2x-1,5)}{4} = \left[ (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \right] \\ &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 2(2x - 1,5)}{4} = \left[ \begin{array}{l} \text{Gängra in} \\ -2 \text{ i } ( ) \\ \text{OBS! } -2 \cdot -1,5 = +3 \end{array} \right] \\ &= \frac{4x^2 + 4x + 1 - 4x + 3}{4} = \frac{4x^2 + 4}{4} = x^2 + 1\end{aligned}$$

13. I uttrycket nedan gäller att  $a = 2x + 3$  och  $b = x + 1$

Uttrycket kan efter förenkling skrivas som två konjugat multiplicerade med varandra. Bestäm dessa båda konjugat.

$$a^2 - 12b - 6$$

"Parentesa" a och b  $\Rightarrow a = (2x + 3)$   
 $b = (x + 1)$

Konjugat =  
Parvisa uttryck  
där endast tecknet  
mellan skiljer  
ex:  $(5+x)$  och  $(5-x)$   
(0/3/0)

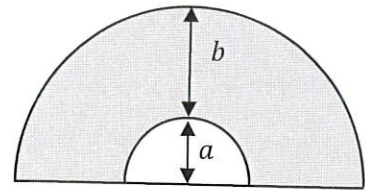
$$\begin{aligned}a^2 - 12b - 6 &= (2x+3)^2 - 12(x+1) - 6 = \left[ (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9 \right] \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 12(x+1) - 6 = \left[ \text{Gängra in } -12 \text{ i } ( ) \right] \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 12x - 12 - 6 = \left[ 12x \text{ försvinner} \right] = \\ &= 4x^2 - 9 = \left[ \begin{array}{l} \text{konjugatregeln baklänges} \\ (2x+3)(2x-3) = 4x^2 - 9 \end{array} \right] \\ &= (2x+3)(2x-3)\end{aligned}$$

De två konjugaten är  
 $(2x+3)$  och  $(2x-3)$

14. Figuren visar två halvcirklar inuti varandra. Den mindre halvcirkeln har radien  $a$  och är centrerad inuti den större.

Bestäm ett uttryck för det markerade området.

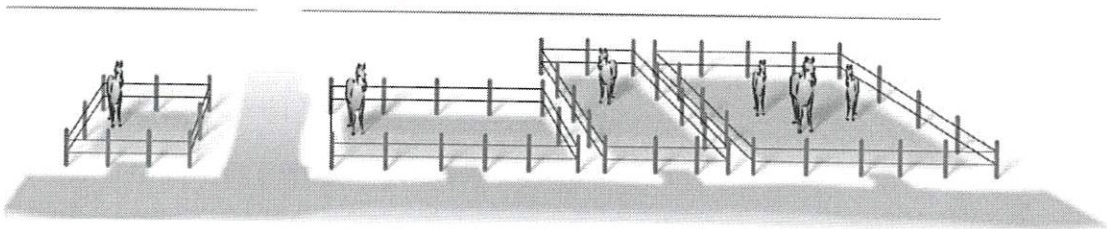
(0/2/0)



$$\begin{aligned}
 & \text{[Handwritten diagram: A shaded semicircular ring]} = \text{[Handwritten diagram: Large semicircle with radius (a+b)]} - \text{[Handwritten diagram: Small semicircle with radius a]} \\
 & = \frac{\pi \cdot (a+b)^2}{2} - \frac{\pi \cdot a^2}{2} = \left[ \begin{array}{l} \text{Area av} \\ \text{en halvcirkel} = \frac{\pi \cdot \text{Radien}^2}{2} \end{array} \right] \\
 & = \frac{\pi \cdot (a^2 + 2ab + b^2)}{2} - \frac{\pi \cdot a^2}{2} = \left[ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ \text{Samma nämnare} \\ \Rightarrow \text{ett bråk} \end{array} \right] = \\
 & = \frac{\pi \cdot (a^2 + 2ab + b^2) - \pi a^2}{2} = \left[ \begin{array}{l} \text{Gånger in} \\ \pi i (1) \end{array} \right] = \frac{\pi a^2 + 2\pi ab + \pi b^2 - \pi a^2}{2} = \frac{2\pi ab + \pi b^2}{2}
 \end{aligned}$$

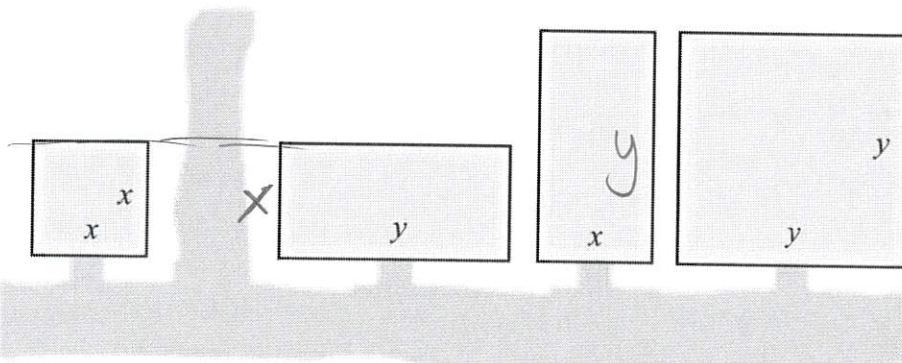
15. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

Bilden visar fyra hästhagar som är kvadratiska respektive rektangulära med sidlängderna  $x$  och  $y$  meter.



Nedan visas en skiss över hur hagarna ser ut ovanifrån.

(m)



Hästarna ska flyttas till en ny gemensam hage. Den nya hagen är kvadratisk och har lika stor area som de fyra ursprungliga hagarna tillsammans.

Bestäm ett förenklat uttryck för sidans längd hos den nya hagen.

(0/1/1)

$$\begin{aligned}
 & \text{De fyra hagarnas areor tillsammans} = x^2 + xy + xy + y^2 \\
 & = x^2 + 2xy + y^2 = \left[ \begin{array}{l} \text{Kvadreringsregeln} \\ \text{baklänges} \end{array} \right] = (x+y)^2
 \end{aligned}$$

16. Uppgiften nedan är ifrån ett gammalt nationellt prov. Lös uppgiften.

(0/0/1)

Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

$$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})^2 - (x+3)}{2} = \left[ (\sqrt{x} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{x})^2 + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \right] = \left[ \begin{array}{l} (\sqrt{x})^2 = x \\ (\sqrt{3})^2 = 3 \end{array} \right]$$
$$= \frac{x + 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{3} + 3 - (x+3)}{2} = \left[ \begin{array}{l} \text{Gånger in} \\ -1 i () \end{array} \right] =$$
$$= \frac{x + 2\sqrt{x}\sqrt{3} + 3 - x - 3}{2} = \left[ \begin{array}{l} x \text{ och } 3 \\ \text{försvinner} \end{array} \right] = \frac{2\sqrt{x}\sqrt{3}}{2} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{3}$$

17. Mattias påstår följande:

"Ta två udda på varandra följande tal,  
exempelvis 3 och 5.

Kvadrera talen var för sig.  
I detta fall fås 9 och 25.

Lägg ihop dessa tal.  
I detta fall:  $9 + 25 = 34$

Plocka bort 2 från summan,  
dvs här  $34 - 2 = 32$

Du kommer att få ett tal som är delbart med 8.  
Med talen i exemplet:  $32$  delat med 8 blir 4"

Visa att Mattias påstående stämmer för **alla** på varandra följande udda tal.

(0/0/3)

Ett udda tal är alltid ett jämnt tal  $+1 \Rightarrow$

$(2x+1)$  blir alltid ett udda tal.

Nästa udda tal blir då  $(2x+3)$

Kvadreras dessa får:  $(2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$

$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

Summeras dessa får:  $8x^2 + 16x + 10$

Ta bort 2 från summan:  $8x^2 + 16x + 10 - 2 = 8x^2 + 16x + 8$

Detta går att dela med 8  $\Rightarrow 8x^2 + 16x + 8 = x^2 + 2x + 1$  osv.

vilket också kan skrivas  $\sqrt{3x}$