FACIT

Matematik 4 – ”Övningsprov” på E-nivå

Del 1a – Utan digitala hjälpmedel - Endast svar krävs!

1. Derivera

Kedjeregeln

a) $y = 2(3x-5)^4$

$y' = 2 \cdot 4 \cdot (\quad)^3 \cdot 3$

inre derivata

Svar: $24 \cdot (3x-5)^3$ (1/0/0)

b) $y = ln\,(x) \cdot x$

Produktregeln

$y' = \underline{\frac{1}{x}} \cdot \underline{x} + \underline{\ln(x)} \cdot \underline{1}$

Svar: $1 + \ln(x)$ (1/0/0)

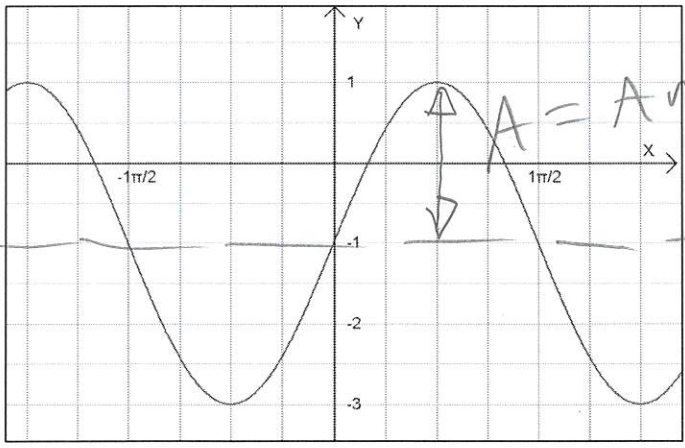
c) $y = 2\cos\,(3x) + \sin\,(2x)$

Kedjeregeln x 2

$y' = 2 \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 + \cos(2x) \cdot 2$

Svar: $-6\sin(3x) + 2\cos(2x)$ (1/0/0)

2. Figuren nedan visar grafen till en trigonometrisk funktion, som kan skrivas på formen $y = Asin(2x) + B$



A = Amplituden = 2

B = Mittlinjen = −1

Bestäm värdet av konstanterna A och B.

Svar: $A =$ 2

$B =$ −1 (2/0/0)

3. Det finns många komplexa tal, z, för vilket det gäller att $Im\;\bar{z} = 3$.

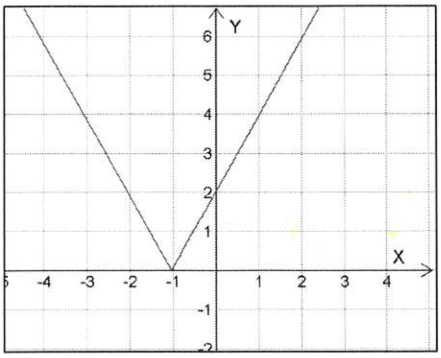
Ange ett exempel på ett sådant tal, z
Svara på formen $a + bi$!

exempelvis:

Svar: $z =$ $5 - 3i$ (1/0/0)

Om $\mathrm{Im}\,\bar{z} = 3$ måste $\mathrm{Im}\,z = -3$ pga att konjugatets "i-siffra" alltid är tvärtom

4. Bestäm ett funktionsuttryck som ger grafen nedan



Dessa grafer kräver ett absolutbelopp. Det finns flera sätt att tänka, ex: linjen

$y = 2x + 2$ som "beloppats"

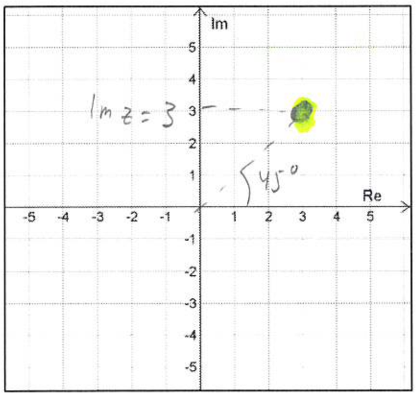
eller

$y = -2x - 2$

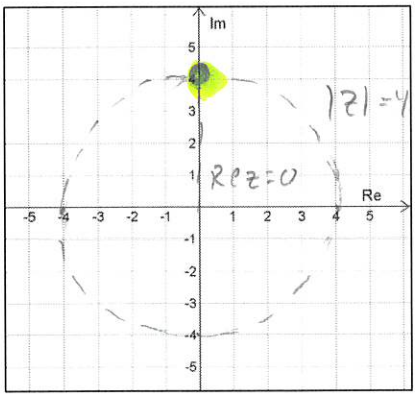
Svar: $|2x+2| = |-2x-2|$ (2/0/0)

$= 2|x+1|$ (OBS! endast ett svar krävs)

5. Markera i de komplexa talplanen nedan ett komplext tal, z, som uppfyller de **båda villkoren** som står under talplanet.

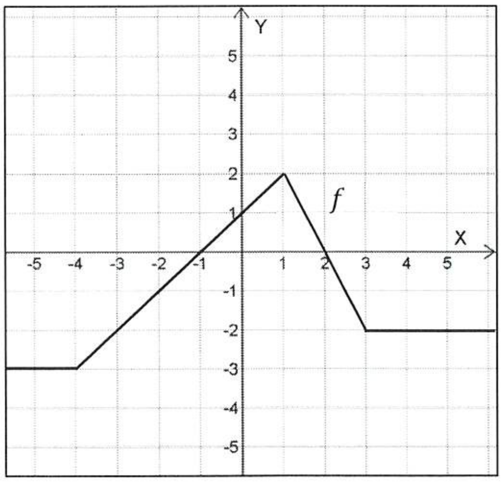


a) $Im\, z = 3$
$arg\, z = 45°$ (1/0/0)

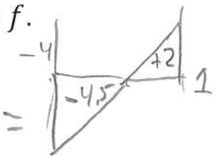


b) $|z| = 4$
$Re\, z = 0$ (1/0/0)

6. Figuren visar grafen till funktionen f.



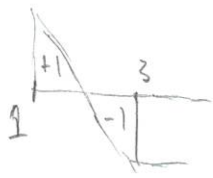
a) Bestäm värdet av $\int_{-4}^{1} f(x)dx$ =



Svar: $-2,5$ (1/0/0)

b) Bestäm det värde på a som löser $\int_{1}^{a} f(x)dx = 0$

Svar: $a =$ $a = 3$ (1/0/0)



7. Lös ekvationen $z^3 - 4z^2 + 20z = 0$

Bryt ut z och kör p-q:

$z(z^2 - 4z + 20) = 0$

$z = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4 - 20}$
$= 2 \pm \sqrt{-16} = [\sqrt{-16} = 4i]$

Svar: $z_1 =$ 0

$z_2 =$ $2 + 4i$

$z_3 =$ $2 - 4i$ (2/0/0)

8. För de två komplexa talen z_1 och z_2 gäller

$z_1 = 2(\cos(40°) + i\sin(40°))$ och $z_2 = 3(\cos(30°) + i\sin(30°))$

a) Bestäm $|z_1^3|$ = Avståndet hos z_1 upphöjt till $3 = (8, 120°)$

$z_1 = (2, 40°)$
$z_1^3 = (8, 120°)$

Svar: 8 (1/0/0)

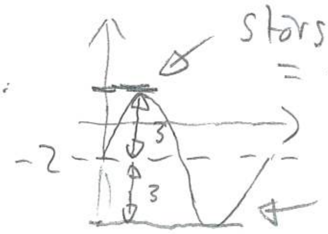
b) Bestäm arg $(z_2 \cdot z_1)$ ← Vinkeln hos $(6, 70°)$

$z_1 = (2, 40°)$ $z_2 = (3, 30°)$

$z_1 \cdot z_2 = (6, 70°)$

Svar: 70° (1/0/0)

9. För funktionen y gäller att $y = 3\sin(10x) - 2$ ← Skiss:



Största värdet $= -2 + 3 = 1$

minsta värdet $= -2 - 3 = -5$

a) Bestäm funktionens **minsta** värde

Svar: −5 (1/0/0)

b) Bestäm funktionens period.
Svara i grader!

$k = 10 \Rightarrow P = \frac{360°}{k} = \frac{360}{10} = 36°$

Svar: 36° (1/0/0)

10. Hur många grader är $\frac{\pi}{12}$ radianer?

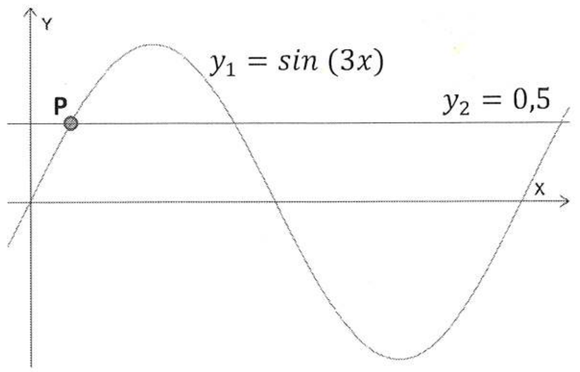
$\frac{\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{180}{12} = 15°$

GRAD → rad
$\cdot \frac{\pi}{180}$

Svar: 15° (1/0/0)

GRAD ← rad
$\cdot \frac{180}{\pi}$

11. Nedan visas graferna till funktionerna $y_1 = \sin(3x)$ och $y_2 = 0{,}5$ där x anges i grader. Punkten **P** visar en skärningspunkt mellan graferna.



P är första lösningen till ekv. $\sin(3x) = 0{,}5$

$3x_1 = \left[\text{FB: } \sin \rightarrow \frac{0{,}5}{\boxed{30°}} \right] = 30°$

$3x_1 = 30° \quad x_1 = 10°$

Bestäm x-koordinaten på punkten $\boldsymbol{P}$.
Svara i grader!

Svar: $x = 10°$ (1/0/0)

12. Funktionen nedan har tre asymptoter. Ange dessa tre.

$$f(x) = \frac{4x+2}{x^2-9} + 1$$

Skriv nämnaren i faktorform:

Svar: $x =$ -3
$x =$ $+3$
$y =$ 1 (2/0/0)

$$f(x) = \frac{4x+2}{(x-3)(x+3)} + 1$$

De vertikala ("x=") motsvarar nämnarens nollställen:

$x_1 = 3$
$x_2 = -3$

Den horisontella ("y=") motsvarar vad som återstår då $x \rightarrow \infty$.

I detta fall fås: $\frac{4x+2}{x^2-9} + 1 = 1$

Går mot noll då täljaren har lägre grad än nämnaren.

Del 1b – Utan digitala hjälpmedel - Fullständiga uträkningar/motiveringar krävs!

13. Beräkna $\dfrac{7+i}{2+i}$

Svara på formen a + bi! (2/0/0)

Vid division mellan två komplexa tal på formen a+bi, förläng med nämnarens konjugat. I detta fall (2−i)

$$\frac{(7+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{14-7i+2i-i^2}{4-2i+2i-i^2} =$$

$$= [i^2=-1] = \frac{14-5i+1}{4+1} = \frac{15-5i}{5}$$

$$= 3-1i$$

14. För en vinkel, v, som befinner sig i första kvadranten gäller att $\sin(v) = \dfrac{1}{5}$

Bestäm värdet av cos (v). (2/0/0)

Svara exakt!

Vet man den ena av sin eller cos kan alltid den andra fås med trig. ettan:

$\sin^2 v + \cos^2 v = 1$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2(v) = 1$$

$$\cos(v) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{24}}{5}$$

15. Undersök om funktionen $y = e^{-x} + 4x + 4$ löser differentialekvationen

$y' + y = 4x$ (2/0/0)

Utgå från den givna funktionen $y = e^{-x} + 4x + 4$ och derivera den: $y' = -e^{-x} + 4$

Stoppa sedan in i ekv. vänstra sida och se om det blir den högra

$$y' + y =$$

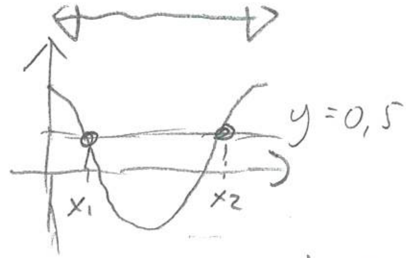
$$(-e^{-x}+4) + (e^{-x}+4x+4)$$

$$= 4x + 8$$

Eftersom 4x+8 INTE är 4x är y INTE en lösning.

$P = \frac{360}{6} = 60°$

16. Lös ekvationen $\cos(6x) = 0{,}5$ (3/0/0)
Svara i grader!



x_1 fås via formelbladet: $\cos^{-1} 0{,}5 = 60°$

$6 \cdot x_1 = 60°$

$x_1 = 10°$ x_2 fås via symmetrin:
$x_2 = P - x_1 = 60 - 10 = 50°$

Alla lösningar: $x = 10° + n \cdot 60°$
$x = 50° + n \cdot 60°$
(Kan också skrivas $x = \pm 10° + n \cdot 60°$)

17. Visa att $\cos^2 x - 1 + \sin x(1 + \sin x) = \sin x$ (2/0/0)

$VL = \cos^2 x - 1 + \sin x(1 + \sin x) =$ [Gångra in $\sin x$ i ( )]

$= \cos^2 x - 1 + \sin x + \sin^2 x =$ [$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ enl. trig. ettan]

$= 1 - 1 + \sin x = \sin x = HL$

VSV.

18. Bestäm kvoten och resten vid divisionen $\frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$ (3/0/0)

Polynomdivision:

$\boxed{x^2} + 2x + 3 \quad | \ \underline{\triangle x} + 1$

1) "Hur många ggr går $\triangle x$ i $\boxed{x^2}$?"
Svar: x ggr.

2) Gångra x med nämnaren $= x+1$
$x \cdot (x+1) = x^2 + x$

3) Övre minus nedre
$x^2 + 2x + 3 - x^2 - x = x + 3$

4) "Hur många ggr går $\triangle x$ i $\boxed{x}$?"
Svar: 1

5) Gångra 1 med nämnaren
$1 \cdot (x+1) = x + 1$

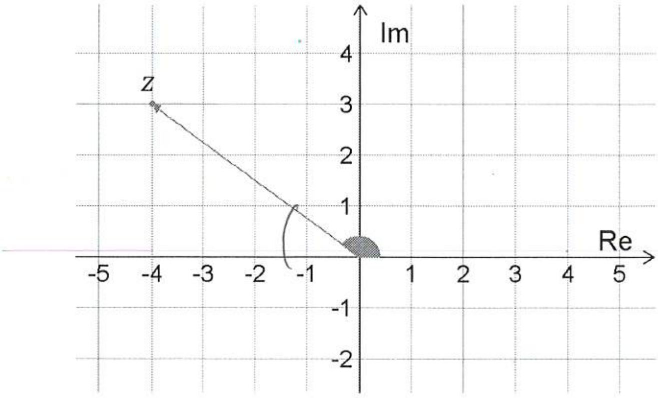
6) Övre minus nedre
$x + 3 - x - 1 = 2$ ← Resten

Kvoten: $x + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 + 2x + 3 & x+1 \\
x^2 + x & \\
\hline
x + 3 & \\
x + 1 & \\
\end{array}
$$

Del 2 – Med digitala hjälpmedel – Fullständiga uträkningar/motiveringar krävs!

D1. Figuren visar ett komplext talplan med ett tal, z, markerat.



En ligt figuren:

$z = -4 + 3i$

Skriv talet z i polär form. (2/0/0)

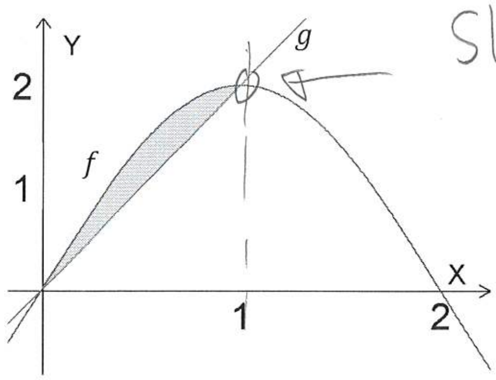
Uppgifter av detta slag kan lösas på två sätt:

Direkt i Geogebra → Kommandot TillPolärForm(z) → (5 ; 143.13°)

"Manuellt" → 3, 4. Beräkna vinkeln inuti med $v = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ och avståndet med Pyth. sats → (5 ; 143.13°)

D2. Figuren visar ett område som begränsas av funktionerna

$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ och $g(x) = 2x$



Skärning(f, g) ⇒ (1, 2)

Bestäm arean av området. (2/0/0)

Svara med 2 decimaler!

Börja med att hitta skärningspunkten: (1, 2)

Områdets area fås sedan med kommandot IntegralMellan(övre, nedre, vänster, höger)

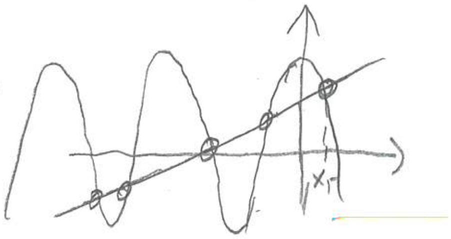
I detta fall: IntegralMellan(f, g, 0, 1)

≈ 0,27 ae

D3. Utgå från ekvationen $2x + 3{,}5 = 5\cos(3x)$.
Ekvationen har flera lösningar. Samtliga ligger i intervallet $-5 \leq x \leq 2$

a) Hur många lösningar har ekvationen? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Rita graferna fås:



5 skärningspunkter $\Rightarrow$ 5 st lösningar

b) Bestäm den största av ekvationens lösningar. (1/0/0)
Svara med tre värdesiffror!

Största lösningen finns längst till höger:
Skärning $\Rightarrow$ $x_5 \approx 0{,}2209$
(OBS! y-värdet är oviktigt vid ekv. lösning)

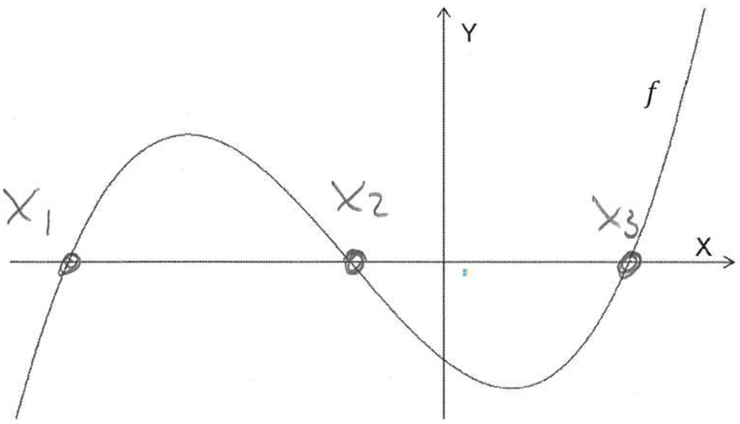
D4. Funktionen $f(x) = 3x + 4{,}91x^2$ beskriver hastigheten på en sten som kastas rakt ner ifrån en hög bro ner i en älv.

f är hastigheten i m/s efter x sekunder i luften.

Bestäm $\int_0^2 f\,dx$ och tolka resultatet. (2/0/0)

Skriv in funktionen och använd kommandot
Integral(Funktion, Från, Till)
Integral (f, 0, 2) $\approx$ 19,09
Funktionens enhet är m/s $\Rightarrow$
Integralens enhet är m
$\Rightarrow$ Stenen föll 19,09 m under de 2 första sekunderna

D5. Figuren visar grafen till funktionen $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 12x - 16$



a) Lös ekvationen $f(x) = 0$ (1/0/0)

Skriv in och använd antingen skärning eller Lös

$X_1 = -4$ $X_2 = -1$ $X_3 = 2$

b) f kan skrivas på formen $f = 2 \cdot a \cdot b \cdot c$.

Ange *någon* av de tre faktorerna a, b eller c (1/0/0)
Endast svar krävs!

Varje nollställe (dvs $X = -4$, $x = -1$, $x = 3$) hör ihop med en faktor enligt tänket: Faktorn = (X - Nollstället) $\Rightarrow$ $a = (x+4)$, $b = (x+1)$, $c = (x-3)$

D6. Vikten på en viss population av utter är normalfördelad med medelvärdet 8 kg och standardavvikelsen 1,4 kg.

I populationen ingår 460 uttrar. Hur många av dessa väntas väga mer än 9 kg? (2/0/0)

Byt till Perspektiv - Sannolikhet i Geogebra:

$\mu = 8$
$\sigma = 1.4$ [$9 \le X$ $\Rightarrow$ $\approx 0,2375$

23,75 % av uttrarna väger mer än 9 kg, vilket motsvarar $0,2375 \cdot 460$

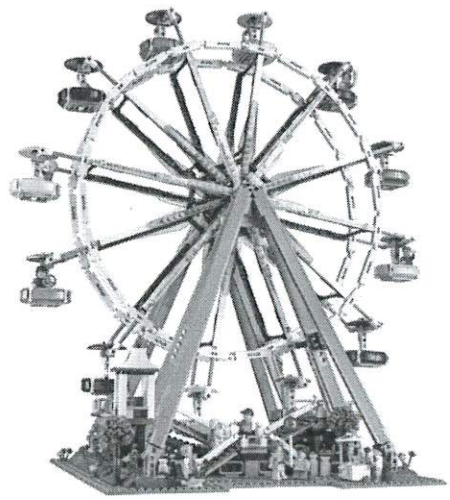
$\approx$ 109 st

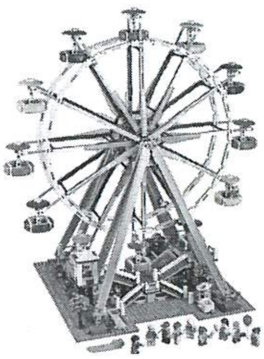
D7. Lego säljer ett ståtligt pariserhjul med motor. Anta att pariserhjulet roterar med konstant hastighet och där en viss korgs höjd över marken kan beskrivas med funktionen

$$y(t) = 32 - 26\sin\left(\frac{\pi}{11}t\right)$$

där t är tiden i sekunder som hjulet snurrat. (angivit i radianer)
och y är höjden över marken i cm.

Vid tiden $t = 0$ s är den aktuella korgen längst till höger. (Se bild nedan)





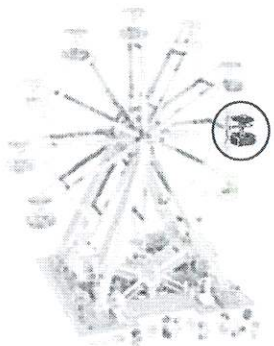


Bild av den aktuella korgen vid $t = 0$ s

a) Hur högt upp är korgen när den är som *högst* över marken? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Skriv in funktionen och använd kommandot Extrempunkt $\Rightarrow$ 58 cm
(endast y-värdet)

b) På vilken höjd befinner sig korgen efter att ha snurrat i **en minut**? (1/0/0)

En minut $\Rightarrow$ $t = 60$ s
Beräkna $y(60) = 32 - 26 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{11} \cdot 60\right) \approx 57{,}7$ cm

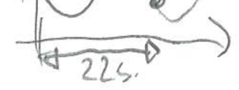
c) Hur snabbt ändras höjden vid tiden 20 sekunder? (1/0/0)

"Hur snabbt" $\Rightarrow$ Derivatan
Derivatan vid tiden 20 $\Rightarrow$ $y'(20) \approx -6{,}25$ cm/s
Den minskar med 6,25 cm/s

d) Hur lång tid tar ett varv? (2/0/0)

Tiden för ett varv motsvarar perioden.
Den kan fås på flera sätt:
ex: $k = \frac{2\pi}{p} \Rightarrow p = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{11}} = 22$ s

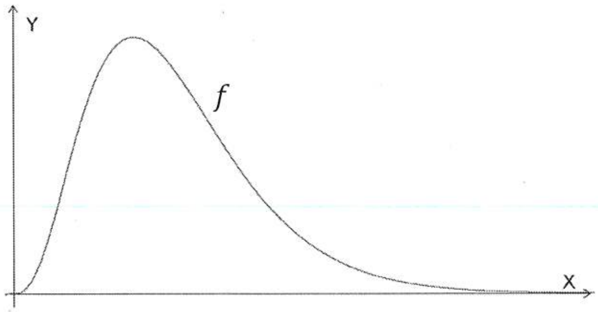
eller lättast genom Geogebra



D8. Funktionen $f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 \cdot e^{-x}$ där $x > 0$ beskriver en förenklad modell för ett berg.

x = antalet ~~meter~~ km längs marken.

f = antalet ~~meter~~ km i höjdled.



a) Hur högt är berget? (1/0/0)

Högsta punkten motsvarar vändpunkten, som fås med kommandot Extrempunkt.

Extrempunkt(f) ⇒ (3 , 2,15) ⇒ 2,15 km högt

b) Hur brant lutar berget vid $x = 2$? (1/0/0)

"Lutar" ⇒ Derivatan

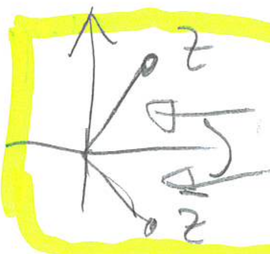
$f'(2) = 0{,}87$ km/km

D9. Conny påstår att ett komplext tal, z, och dess konjugat, $\bar{z}$, alltid har **samma avstånd till origo**.

Undersök om Conny har rätt. (2/0/0)

Kan lösas på flera sätt, exempelvis via Geogebra. Sätt ut valfritt komplext tal. Använd kommandot abs(z) för att beräkna avståndet. Gör motsvarande för konjugat(z).

Kan också lösas algebraiskt eller geometriskt



samma sträcka.

Conny har rätt!