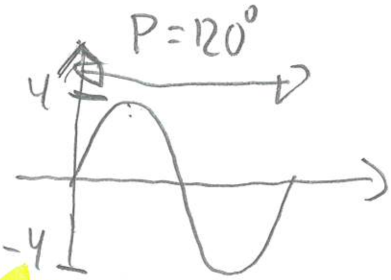
Namn: FACIT

Matematik 4 – Prov på E-nivå

Del 1 – Utan digitala hjälpmedel - Endast svar krävs!

1. Ge exempel på en trigonometrisk funktion som uppfyller villkoren nedan:

största värdet 4
minsta värdet -4 $\Rightarrow A=4, \; B=0$
perioden 120° $\Rightarrow k = \frac{360}{120} = 3$



Svar: ex $f = 4 \cdot \sin(3x)$ (2/0/0)

(Går lika bra med $4\cos(3 \cdot x)$)

2. Lös ekvationen $z^3 + 6z^2 + 34z = 0$

Börja med att bryta ut z

$z(z^2+6z+34)=0$

Lös varje faktor för sig: $z=0$

$z = -3 \pm \sqrt{9-34}$
$= -3 \pm \sqrt{-25} = [\sqrt{-25} = 5i] = -3 \pm 5i$

Svar: $z_1 =$ 0
$z_2 =$ $-3+5i$
$z_3 =$ $-3-5i$ (2/0/0)

3. Derivera

a) $y = 2(4+5x)^3$

Kedjeregeln: $2 \cdot 3 \cdot (\quad)^2 \cdot 5$
Inre derivata

Svar: $y' = 30(4+5x)^2$ (1/0/0)

b) $y = e^{2x} \cdot x^2$

Produktregeln:

$\underbrace{e^{2x} \cdot 2}_{\text{Derivatan till } e^{2x}} \cdot \underbrace{x^2}_{x^2 \text{ oderiverad}} + \underbrace{e^{2x}}_{e^{2x} \text{ oderiverad}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Derivatan till } x^2}$

Svar: $y' = 2e^{2x} \cdot x^2 + e^{2x} \cdot 2x$ (1/0/0)

c) $y = \ln(x) + \sin(4x)$

Derivatan till ln x är $\frac{1}{x}$

Derivatan till sin( ) är cos

$\Rightarrow \sin(4x)$ har derivatan $\cos(4x) \cdot \underbrace{4}_{\text{Inre derivata}}$

Svar: $y' = \frac{1}{x} + 4\cos(4x)$ (1/0/0)

4. För de två komplexa talen z_1 och z_2 gäller

$z_1 = 5(\cos(30°) + i\sin(30°))$ och $z_2 = 2(\cos(120°) + i\sin(120°))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(5, 30°)}{(2, 120°)} = (2.5, -90°)$

a) Bestäm $|z_1/z_2|$

$|\ |$ = endast avståndet.

Svar: $|(2{,}5; -90°)| = 2{,}5$ (1/0/0)

b) Bestäm $z_1 \cdot z_2$

Hela talet

$(5, 30°) \cdot (2, 120°) = (5 \cdot 2, 30° + 120°)$

Svar: $(10, 150°) = 10(\cos 150° + i \sin 150°)$ (1/0/0)

c) Bestäm ett värde på n så att $\arg(z_1^n) = \arg(z_2)$

vinkeln hos z_1^n $= n \cdot 30°$

vinkeln hos z_2 $= 120°$

Svar: $n = 4$ (1/0/0)

Vill lösa ekv: $n \cdot 30° = 120° \Rightarrow n = \frac{120°}{30°} = 4$

5. Det finns många komplexa tal, z, som uppfyller att $z + \bar{z} = 12$

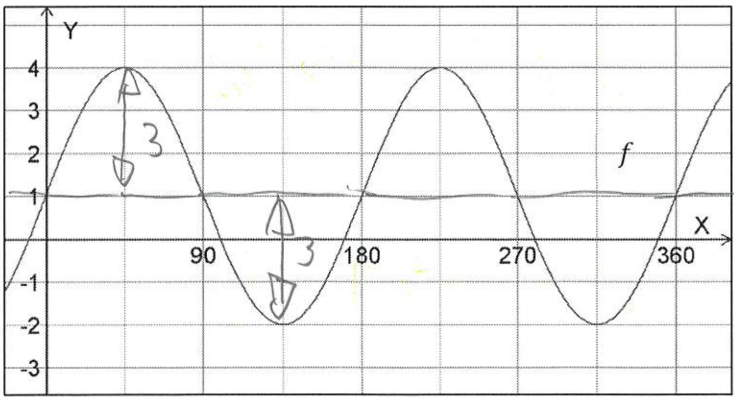
Ge ett exempel på ett sådant tal.

Rent generellt gäller:
$a+bi + (a-bi) =$ [bi tar ut varandra]
$= 2a$

Svar: ex $z = 6 + 2i$ (1/0/0)

i-delen kan vara vad som helst så länge Re $z = 6$

6. Figuren nedan visar grafen till en trigonometrisk funktion, som kan skrivas på formen $y = A \cdot \sin(kx) + B$



Perioden = 180° $\Rightarrow k = \frac{360}{180} = 2$

Uppflyttad 1 steg $\Rightarrow B = 1$

Amplituden = 3 $\Rightarrow A = 3$

Bestäm värdet av konstanterna A, B och k

Svar: $A =$ 3

$B =$ 1

$k =$ 2 (2/0/0)

Kan lösas på många sätt, men utgå från en känd vinkel från formelbladet, ex: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$

7. Hur många *radianer* är 10°?

Då är $10^\circ = \frac{30^\circ}{3} = \frac{\pi/6}{3} = \pi/18$

Svar: $\pi/18$ (1/0/0)

8. a) Markera i det komplexa talplanet nedan det komplexa talet

$(2 - i)(2 + i) + 2i = (4 - i^2) + 2i = [i^2 = -1] = 4 - (-1) + 2i = 5 + 2i$

Märk talet med a) (1/0/0)

b) Markera i det komplexa talplanet nedan ett komplext tal, z, som uppfyller de båda villkoren:

$Re\, z = 0$ ← "x-koordinaten" = 0

$|z| = 3$ ← Avståndet till origo = 3

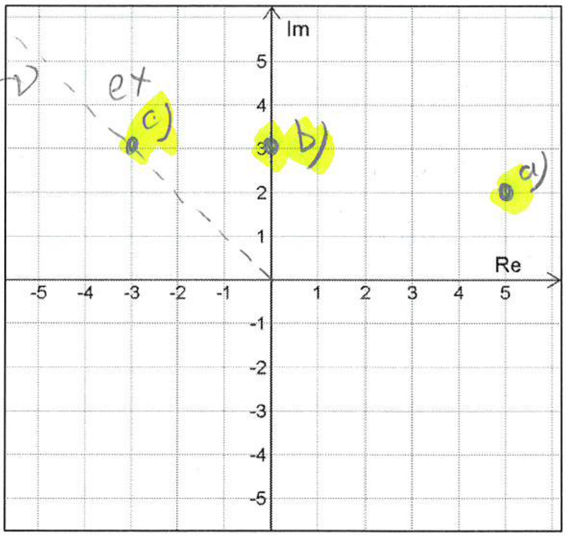
Märk talet med b) (1/0/0)

c) Markera i det komplexa talplanet nedan ett komplext tal, z, som uppfyller villkoret:

$arg\, z = 135°$ ← Vinkeln räknat från pos. Re-axeln är 135° dvs "45° i andra kvadranten"

Märk talet med c) (1/0/0)

c) kan ligga var som helst längs



9. Funktionen nedan har två asymptoter. Ange dessa två.

$$f(x) = \frac{6x + 5}{3x - 3}$$

1. Nämnaren = 0 ⇒ $3x - 3 = 0$, $x = 1$

2.) $y = \frac{6x}{3x} = 2$

Asymptoter fås genom att

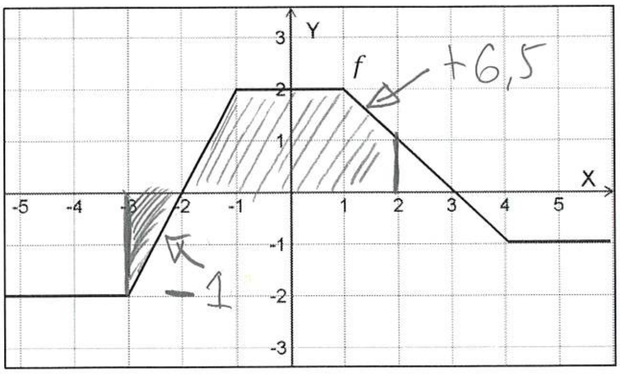
1) Lösa ekv nämnaren = 0

2) Tänka typ "x-termer delat med varandra" (e.g. vad blir värdet då $x \to \infty$)

Svar: $x =$ 1

$y =$ 2 (2/0/0)

10. Nedan visas grafen till funktionen f.



$\int$ = "Totala teckenarean som fås mellan två väggar, grafen och x-axeln"

Allt över x-axeln räknas positivt och allt under räknas negativt

a) Bestäm värdet av integralen $\int_{-3}^{2} f(x)dx$

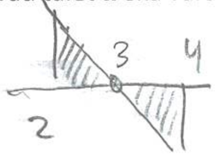
← Höger vägg

vänster vägg

Svar: 6,5 − 1 = 5,5 (1/0/0)

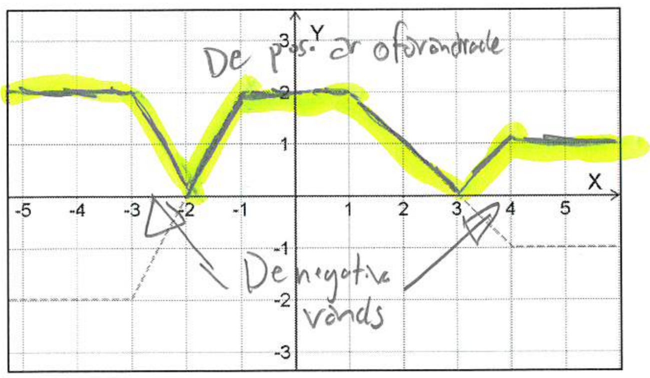
$\int = 0 \Rightarrow$ Lika mycket över som under

b) Bestäm vad talet a ska vara för att lösa ekvationen $\int_{2}^{a} f(x)dx = 0$



Svar: $a =$ 4 (1/0/0)

c) Rita i det tomma koordinatsystemet nedan grafen till $y = |f(x)|$
Som hjälp finns grafen till f svagt streckad. (2/0/0)



Grafen till ett absolutbelopp kommer inte ha några negativa y-värden.
Dessa "spegelvänds" i x-axeln.

Del 1b – Utan digitala hjälpmedel - Endast svar krävs!

Finns även som slumpövning på thelberg.com/ma4 under 1.1

11. Beräkna $\dfrac{14+2i}{1+3i}$

Svara på formen a + bi! (2/0/0)

Vid division mellan komplexa tal på formen (a+bi) förläng alltid med konjugatet till nämnaren.

I detta fall: Nämnaren = $1+3i \Rightarrow$ Konjugatet = $(1-3i)$

$$\frac{(14+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \left[\begin{array}{l}\text{Konjugatregeln i nämnaren} \\ (1+3i)(1-3i) = 1-9i^2 = [i^2=-1] = 1-(-9) = 10\end{array}\right]$$

$$\frac{(14+2i)(1-3i)}{10} = \frac{14-42i+2i-6i^2}{10} = [i^2=-1] = \frac{14-40i-(-6)}{10}$$

$$= \frac{20-40i}{10} = 2-4i$$

12. Lös ekvationen $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (3/0/0)

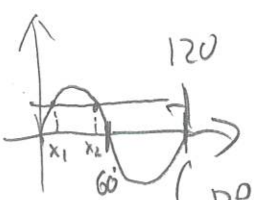
Svara i grader!

Strategi: Bestäm första lösningen mha tabellen på FB

$\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Tabellinfo!

$3x_1 = 60°$

$x_1 = 60/3 = 20°$



Bestäm andra lösningen som halva perioden − första

$x_2 = \dfrac{P}{2} - x_1 =$

$= \dfrac{120°}{2} - 20° = 40°$

(perioden fås som $\dfrac{360}{K} = \dfrac{360}{3} = 120°$)

Alla lösningar fås som

$x_1 + n \cdot$ Perioden

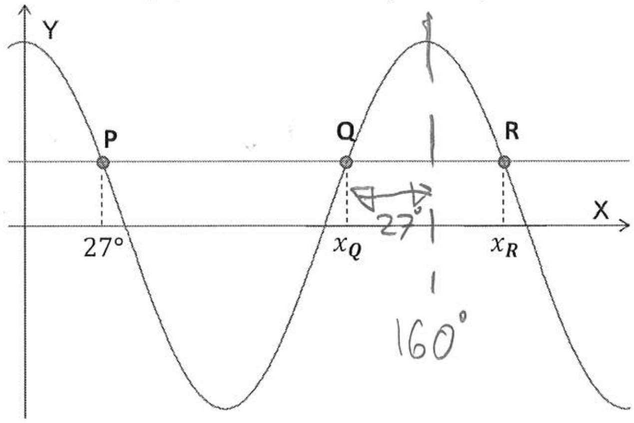
$x_2 + n \cdot$ Perioden

Alla lösningar:

$x = 20° + n \cdot 120°$

$x = 40° + n \cdot 120°$

13. Nedan visas grafen till en icke-förskjuten cosinusfunktion med **perioden 160°**.
Punkterna **P, Q** och **R** har samma y-värde, och x-koordinaten för punkten **P** är 27°



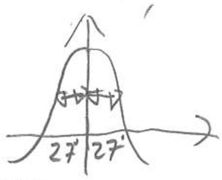
Bestäm skillnaden mellan x-koordinaterna hos punkterna **R** och **Q**, dvs
$x_R - x_Q$ (3/0/0)

$x_R = x_P + 1$ period $= 27 + 160 = 187°$

$x_Q = 1$ period $- 27° = 160° - 27° = 133°$

$x_R - x_Q = 187° - 133° = 54°$

OBS!! $x_R - x_Q$ kan även lösas på andra sätt, ex. via symmetrin kring y-axeln:



14. Visa att $(\sin x + \cos x)^2 - 2\sin x \cos x = 1$ (2/0/0)

$VL = (\sin x + \cos x)^2 - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 1 =$

$= \left[\text{Kvadreringsregeln: } (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \right] =$

$= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x = 1 =$

$= \left[2\sin x \cos x - 2\sin x \cos x = 0 \right] =$

$= \sin^2 x + \cos^2 x = \left[\text{Trig. ettan } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \right] = 1 = HL$ vsv.

Namn: FACIT

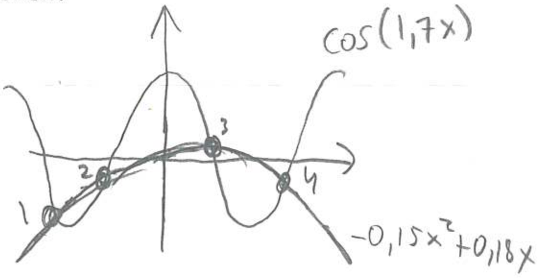
Matematik 4 – Prov på E-nivå

Del 2 – Med digitala hjälpmedel – Fullständiga uträkningar/motiveringar krävs (om inget annat anges)!

D1. Utgå från ekvationen $-0{,}15x^2 + 0{,}18x = \cos(1{,}7x)$.
Ekvationen har flera lösningar. Samtliga ligger i intervallet $-3 \leq x \leq 3$

a) Hur många lösningar har ekvationen? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Ritas graferna fås:



Lösningar till ekv = Skärningspunkter mellan graferna = 4 st

b) Bestäm den största av ekvationens lösningar. (1/0/0)
Svara med tre värdesiffror!
Endast svar krävs!

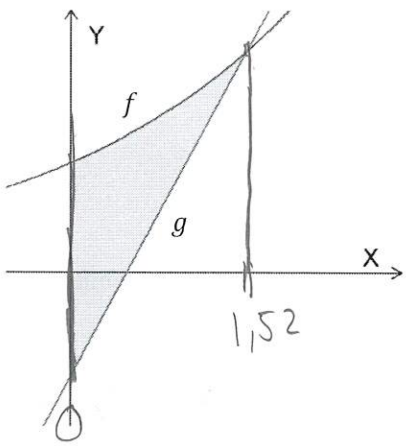
Största = Den med högst x-värde: Den som kallas lösning 4 i skissen ovan

Skärning ⇒ (2,48 ; -0,48) ⇒ $x \approx 2{,}48$

D2. Figuren visar ett område som begränsas av x-axeln samt graferna till funktionerna

$f(x) = 1{,}6^x$ och $g(x) = 2x - 1$

Bestäm arean av området.
Svara med 2 decimaler! (2/0/0)



Arean mellan grafer ges alltid av $\int (\text{övre} - \text{nedre})\,dx$

Detta finns som Geogebrakommandot "IntegralMellan"

Strategi: Ta fram skärningspunktens x-koordinat: Skärning(f,g) ⇒ $x \approx 1{,}52$

Bestäm arean med IntegralMellan: IntegralMellan(f, g, 0, 1.52)

"Tak" "Golv" Vänster Höger

$\approx 1{,}43$ ae

D3. Bestäm det värde på konstanten a så att funktionen $y = e^{3x}$ är en lösning till differentialekvationen "DE"

$y'' + y' - ay = 0$ (2/0/0)

Strategi: Eftersom DE innehåller både y' och y'' behöver dessa först tas fram:

$y = e^{3x}$ $y' = 3e^{3x}$ $y'' = 9e^{3x}$

Stoppa in på resp plats i DE.

$9e^{3x} + 3e^{3x} - ae^{3x} = 0$

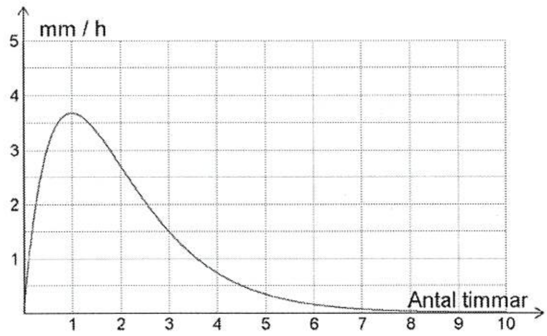
$(\text{"}y'' + y' - a \cdot y = 0\text{"})$

$\Rightarrow 12e^{3x} - ae^{3x} = 0 \Rightarrow a = 12$

D4. I den lilla orten BlötTräsk regnar det mycket. En dag gavs intensiteten hos regnet av

$f(x) = 10x \cdot e^{-x}$

där x är antalet timmar som gått sedan regnandet började.



Hur mycket regn hade kommit efter 3 timmar? (2/0/0)
Svara med 2 decimaler!

Enheten hos funktionen är mm/h $\Rightarrow \int f$ kommer ge enheten mm.

"Hur mkt regn" = Antal mm = $\int_0^3 f \, dx$

Skriv in funktionen

och sedan Integral(f, 0, 3) $\approx$ 8,01 mm

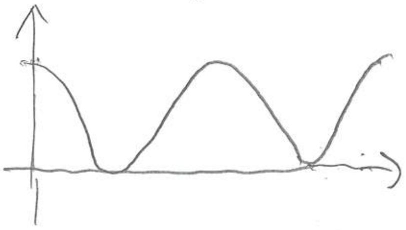
D5. Enligt en förenklad modell kan vattennivån under ett visst dygn på ett ställe där tidvatten förekommer beskrivas med

$y = 8{,}0 + 8{,}0\cos(0{,}52x)$

där y är vattnets höjd i meter jämfört med lägsta vattennivån och x är antalet timmar efter klockan 03.00

a) Bestäm höjdskillnaden mellan högsta och lägsta vattennivån enligt modellen. (1/0/0)

Ritas grafen fås:



Extrempunkt $\Rightarrow$ Topparna har y-värdet 16 och bottnarna har y-värdet 0

$\Rightarrow 16 - 0 = 16$ m

b) Hur högt över lägsta vattennivån är vattnet klockan 07.00 ? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Klockan 7.00 $\Rightarrow x = 4$

$y(4) = 8 + 8 \cdot \cos(0{,}52 \cdot 4) \approx 4{,}1$ m

c) Vid vilket klockslag är vattnet som lägst? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Extrempunkt(f) $\Rightarrow (6{,}04, 0) \Rightarrow$ Efter 6 h

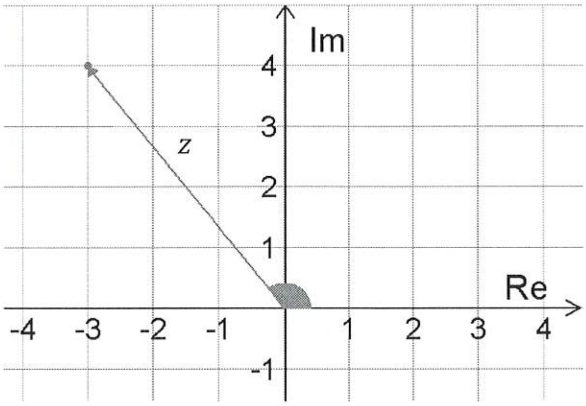
$\Rightarrow$ kl. 03 + 6 = $\approx$ 9.00

d) Bestäm värdet av $y'(5)$ samt tolka resultatet. (2/0/0)
Endast svar krävs!

$y'(5) \approx -2{,}14$ $\Rightarrow$ Kl. 8.00 minskar temp med hastigheten 2,14 °C/h

Skriv "$y'(5)$"

D6. Figuren visar ett komplext talplan med ett tal, z, markerat.



Skriv talet z i polär form. (2/0/0)

Enligt figuren gäller att $z = -3 + 4i$

Lättast är att använda kommandot

"TillPolärform$(-3+4i)$" $\rightarrow$ $z = (5\,;\,126{,}9^\circ)$

Kan också skrivas: $z = 5(\cos 126{,}9^\circ + i \cdot \sin 126{,}9^\circ)$

D7. För en vinkel, v, som befinner sig i första kvadranten gäller att $\cos(v) = \dfrac{1}{4}$

Bestäm värdet av $\sin(v)$. (2/0/0)

Svara exakt!

Strategi: Använd trig. ettan:

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

Stoppa in "$\frac{1}{4}$" på $\cos v$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \sin^2 v = 1$$

Lös ut $\sin v$

$$\sin v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

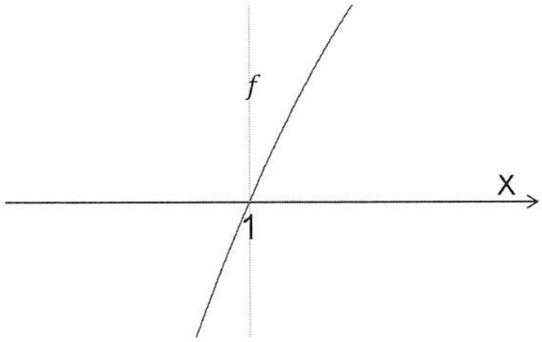
D8. Mattias önskar lösa ekvationen $f(x) = 0$ om
$f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$.

Han ser på grafen att en lösning är $x = 1$.

För att lösa ekvationen påbörjar han polynomdivisionen

$$\frac{f}{x+1}$$

Mattias utför dock fel polynomdivision för att lösa ekvationen.



a) Vilken division borde Mattias ha gjort istället? (1/0/0)
Endast svar krävs!

Om $x=1$ är ett nollställe är motsvarande faktor $(x-1)$

b) Nedan visas Mattias påbörjade polynomdivision.
Divisionen är inte slutförd.
Bestäm vad **resten** blir genom att slutföra polynomdivisionen. (2/0/0)

$$\begin{array}{llll|l}
x^2 & -8x & +22 & & \\
\hline
x^3 & -7x^2 & +\ 14x & -8 & x+1 \\
x^3 & +\ 1x^2 & & & \\
\hline
0 & -8x^2 & +\ 14x & -8 & \\
 & -8x^2 & -\ 8x & & \\
\hline
 & 0 & 22x & -8 & \\
 & & 22x & +22 & \\
\hline
 & & & -30 &
\end{array}$$

Steg 1: Vad ska x gångras med för att bli 22x?

Svar: +22

Steg 2: Gångra 22 med (x+1)

22x + 22

Steg 3: övre minus nedre

$$\begin{array}{rr}
22x & -8 \\
-\ 22x & -22 \\
\hline
0 & -30
\end{array}$$

c) Lös ekvationen $f(x) = 0$ med hjälp av ditt digitala verktyg. (1/0/0)

Antingen "Lös(f=0)" eller "Skärning(f, 0)"

$\Rightarrow$ $x_1 = 1$

$x_2 = 2$

$x_3 = 4$

D9. Volymen av den rotationskropp som fås då en funktion, f, roterar kring x-axeln kan bestämmas genom att lösa integralen

$$\int_a^b \pi \cdot f^2 \, dx$$

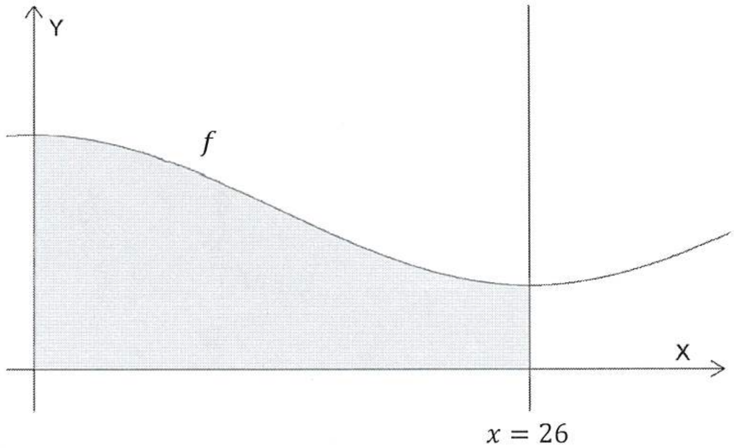
där a och b är de x-värden som begränsar området som ska roteras.

Använd detta för att lösa uppgiften nedan:

"På IKEA kan man köpa en taklampa som ser ut som bilden.

En matematisk modell som kan användas för att skapa lampan är den rotationskropp som fås då det område som begränsas av de båda positiva koordinataxlarna, linjen $x = 26$ samt grafen till funktionen $f(x) = 4{,}5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{26}x\right) + 9{,}5$

roteras kring x-axeln.



Alla mått är i cm.
Undersök om lampan rymmer mer än 5000 cm^3 ". (2/0/0)

Enligt instruktionen ska en integral beräknas.
Det görs med kommandot "Integral"
OBS! "dx" skrivs inte in
Skriv in funktionen: $f(x) = 4.5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{26}x\right) + 9.5$
"Integral(pi·g², 0, 26)" $\Rightarrow$ 8198 cm^3
$\Rightarrow$ 8198 cm^3 > 5000 cm^3 $\Rightarrow$ Ja, lampan rymmer typ 8,2L