FACIT

1.4 Radianer

GRAD $\xrightarrow{\cdot \pi/180}$ rad

GRAD $\xleftarrow{\cdot 180/\pi}$ rad

Del 1 – Utan digitala verktyg

1. Omvandla mellan radianer och grader. *Svara exakt!*

a) 15° (1/0/0)

"GRAD → rad"

$15^\circ = 15 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{15\pi}{180} = \pi/12$

b) $3\,rad$ (1/0/0)

"rad → GRAD"

$3\text{ rad} = 3 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{540^\circ}{\pi}$

c) 40° (1/0/0)

"GRAD → rad"

$40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{40 \cdot \pi}{180} = 2\pi/9$

d) $\frac{\pi}{9}$ (1/0/0)

"rad → GRAD"

$\frac{\pi}{9}\text{ rad} = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 20^\circ$

e) $\frac{5\pi}{12}$ (1/0/0)

"rad → GRAD"

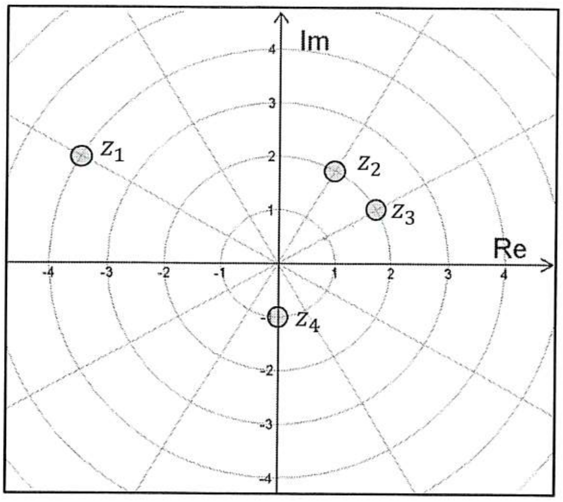
$\frac{5\pi}{12}\text{ rad} = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{900^\circ}{12} = 75^\circ$

f) 9° (1/0/0)

"GRAD → rad"

$9^\circ = 9 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{9\pi}{180} = \frac{\pi}{20}$

2. I det komplexa talplanet nedan visas fyra komplexa tal.



Mellan varje streck är det $30^0 = 30 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

a) Ange z_1, z_2, z_3 och z_4 på polär form, med *argumentet i radianer* (4/0/0)

$z_1 = \left(4, \frac{5\pi}{6}\right)$ $z_2 = \left(2, \frac{2\pi}{6}\right) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$

$z_3 = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ $z_4 = \left(1, -\frac{3\pi}{6}\right) = \left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$

b) Beräkna $\arg(z_2 \cdot z_3)$. *Svara i radianer!* (1/0/0)

Vinkeln

$z_2 \cdot z_3 = \left(2, \frac{2\pi}{6}\right) \cdot \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

$= \left(4, \frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(4, \frac{3\pi}{6}\right)$

$\arg(z_2 \cdot z_3)$

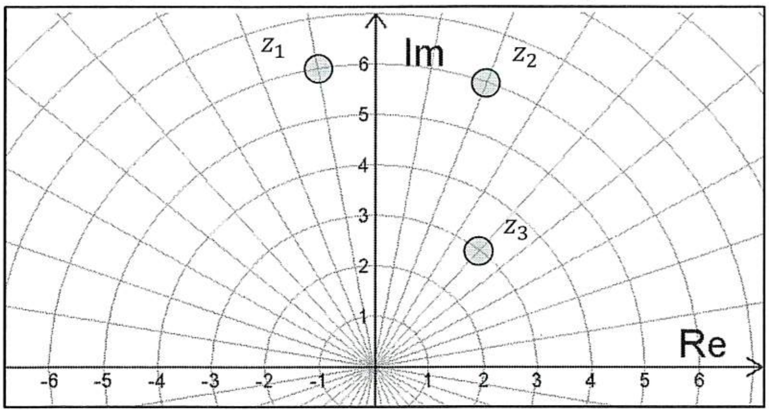
$= \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

c) Beräkna $z_4 \cdot z_3$. *Svara på polär form med argumentet i radianer!* (2/0/0)

$z_4 \cdot z_3 = \left(1, -\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(2, \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \left(2, -\frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{2\pi}{6}\right) = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$

3. I det komplexa talplanet nedan visas tre komplexa tal.



Mellan varje streck är det 10°

$10^\circ = 10 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$

a) Ange talen på polär form med *argumentet i radianer.* (3/0/0)

$z_1 = \left(6, \frac{10\pi}{18}\right) = \left(6, \frac{5\pi}{9}\right)$ $\quad z_2 = \left(6, \frac{7\pi}{18}\right)$

$z_3 = \left(3, \frac{5\pi}{18}\right)$

b) Beräkna $\frac{z_1^2}{z_2}$ och ange svaret på polär form med *argumentet i radianer* (1/1/0)

$$\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{\left(6, \frac{10\pi}{18}\right) \cdot \left(6, \frac{10\pi}{18}\right)}{\left(6, \frac{7\pi}{18}\right)} = \frac{\left(36, \frac{20\pi}{18}\right)}{\left(6, \frac{7\pi}{18}\right)} = \left(6, \frac{13\pi}{18}\right)$$

4. Låt talen $z_1 = 2 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sin\frac{3\pi}{4}\right)$ och $z_2 = 3 \cdot \left(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}\right)$

a) Beräkna z_1^2 och ange svaret på polär form med *argumentet i radianer* (2/0/0)

$$z_1^2 = \left(2, \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \left(4, \frac{6\pi}{4}\right) = \left(4, \frac{3\pi}{2}\right)$$

b) Beräkna $arg(z_1 \cdot z_2^2)$ och ange svaret *i grader* (1/1/0)

Vinkeln $arg(z_1 \cdot z_2^2) = \frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} =$

$\left[\begin{matrix}\text{GN:} \\ 12\end{matrix}\right] = \frac{9\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} = \frac{25\pi}{12} = \left[\begin{matrix}\text{"rad} \\ \to \text{GRAD"}\end{matrix}\right] = \frac{25\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 375^\circ$

c) Beräkna z_2/z_1 och ange svaret på polär form med *argumentet i radianer* (1/1/0)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)}{\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{8\pi}{12} - \frac{9\pi}{12}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\pi}{12}\right)$$

5. Lös ekvationen $z^4 = (81, \pi)$ och ange svaren på polär form med *argumentet i radianer* (2/1/0)

$z_1 = (r, v)$ $\quad z_1^{\,4} = (r^4, 4 \cdot v) = (81, \pi)$

$r^4 = 81 \qquad 4 \cdot v = \pi$

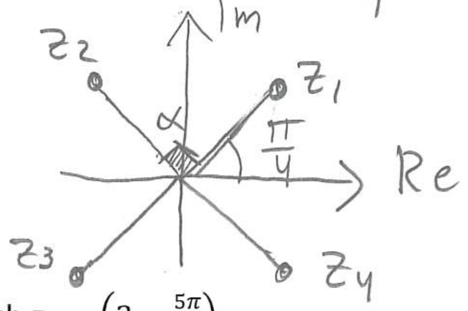
$r = \sqrt[4]{81} = 3 \qquad v = \frac{\pi}{4}$

$z_1 = \left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad + \frac{2\pi}{4}$ Vinkeln mellan: $\alpha = \frac{360}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$z_2 = \left(3, \frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad + \frac{2\pi}{4}$

$z_3 = \left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$ $\quad + \frac{2\pi}{4}$

$z_4 = \left(3, \frac{7\pi}{4}\right)$



6. Complexia tittar på de båda talen $z_1 = (4, 60°)$ och $z_2 = \left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)$.
Complexia påstår att $z_2^{\,2}$ är samma tal som z_1.
Undersök om hon har rätt. (0/2/0)

$z_2^{\,2} = \left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)^2 = \left(4, -\frac{10\pi}{6}\right) = \left[-\frac{5\pi}{3} = \left[\begin{matrix}\text{rad} \\ \to \text{GRAD}\end{matrix}\right] = -\frac{5\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} = -300°\right]$

$= (4, -300°)$

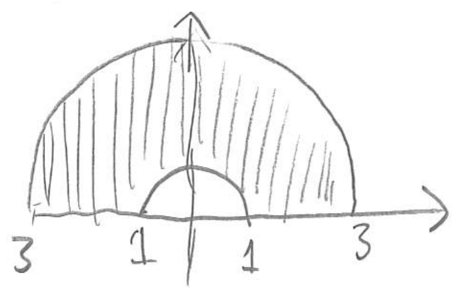
Eftersom $(-300°)$ bara är ett annat sätt att skriva vinkeln $60°$ är det samma tal. Hon har rätt!

7. Uttrycken $0 \le \arg(z) \le \pi$ och $1 \le |z| \le 3$ kommer tillsammans att avgränsa ett område i det komplexa talplanet.

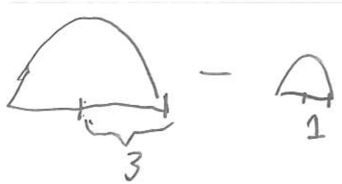
Beräkna arean av detta område. (0/2/0)

$0 \le \arg z \le \pi$ "Alla vinklar mellan $0°$ och $180°$"

$1 \le |z| \le 3$ "Alla avstånd mellan 1 och 3"



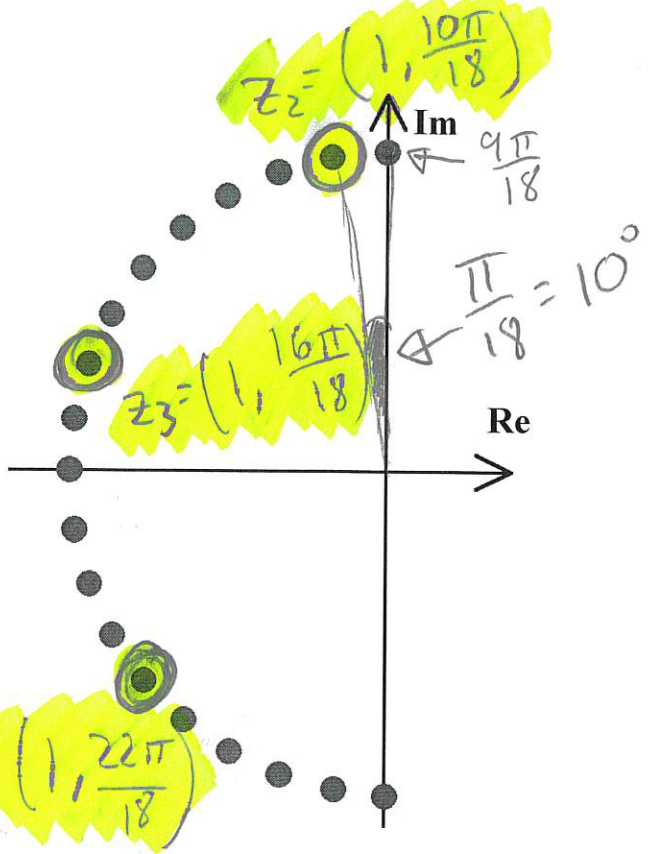
Arean fås som



$= \frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 4\pi$

8. Figuren visar en del av ett komplext talplan med ett antal punkter.
Samtliga punkter ligger på en mittpunktscirkel med radie 1, och det som skiljer punkterna är en vinkel på $\frac{\pi}{18}$
Någon eller några av punkterna visar lösningar till ekvationen

$$z^6 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$



Markera dessa punkter. (0/2/0)

$$z^6 = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\left(r^6, 6 \cdot v\right) = \left(1, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$r^6 = 1$ $\quad 6 \cdot v = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow v = \frac{4\pi}{18}$

$r = 1$

$$z_1 = \left(1, \frac{4\pi}{18}\right)$$

$+\frac{6\pi}{18}$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{6\pi}{18}$$

$$z_2 = \left(1, \frac{10\pi}{18}\right)$$

$+\frac{6\pi}{18}$

$$z_3 = \left(1, \frac{16\pi}{18}\right)$$

$+\frac{6\pi}{18}$

$$z_4 = \left(1, \frac{22\pi}{18}\right)$$

$+\frac{6\pi}{18}$

$$z_5 = \left(1, \frac{28\pi}{18}\right)$$

$+\frac{6\pi}{18}$

$$z_6 = \left(1, \frac{34\pi}{18}\right)$$