Två kluriga träningsuppgifter – Induktion

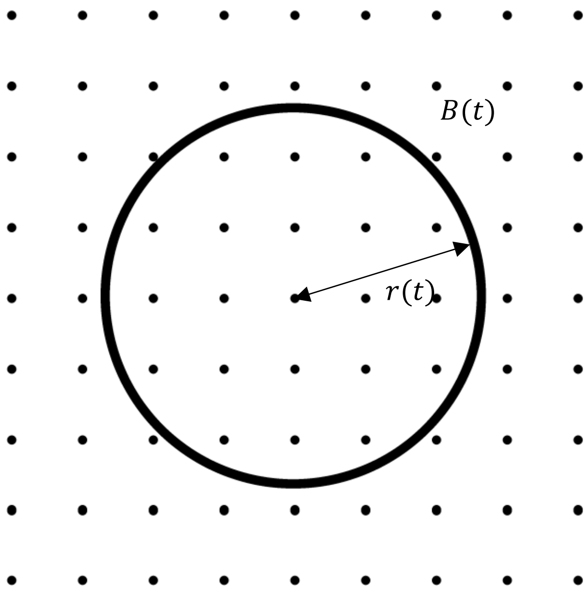
1. Figuren visar en cirkelformad ledarslinga som är placerad i ett magnetfält med rät vinkel mot slingan.

   Den magnetiska flödestätheten är inte konstant utan minskar linjärt från $B_1 = 0{,}7\ mT$ till $B_2 = 0{,}2 mT$ på 10 sekunder.

   Slingans radie är inte heller konstant utan ökar linjärt från $r_1 = 5\ cm$ till $r_2 = 25\ cm$ på samma 10 sekunder.

   Anta att slingans ledarslinga har ett motstånd på $5\ \Omega/cm$.

   Bestäm hur stor ström som induceras i slingan vid tidpunkten 5 sekunder.



Funktion för flödestätheten ges av:

$B(t) = (0{,}2 + 0{,}05t) \cdot 10^{-3}\ T$

Funktion för radien ges av:

$r(t) = 0{,}05 + 0{,}02t\ m$

Det ger Arean till

$A(t) = \pi \cdot r(t)^2 = \pi \cdot (0{,}05 + 0{,}02t)^2$

Flödet defineras som:

$\phi = B \cdot A$

Vilket med tidsberoendet ger:

$\phi(t) = B(t) \cdot A(t)$

Spänningen ges av derivatan av flödet, dvs

$e(t) = \phi'(t)$

Denna kan antingen fås genom att använda produktregeln:

$e(t) = B'(t) \cdot A(t) + B(t) \cdot A'(t)$

Och sedan mata in tiden 5.

Det ger:

$e(5) = B'(5) \cdot A(5) + B(5) \cdot A'(5)$ där

$B'(5) = 0{,}05 \cdot 10^{-3}\, T/s$

$A(5) = \pi \cdot (0{,}05 + 0{,}02 \cdot 5)^2 \approx 0{,}071\, m^2$

$B(5) = 0{,}45 \cdot 10^{-3}\, T$

$A'(5) = 2\pi \cdot (0{,}05 + 0{,}02 \cdot 5) \cdot 0{,}02 \approx 0{,}0188\, m^2/s$

Då blir isf spänningen vid 5 sekunder,

$e(5) \approx 0{,}05 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}071 + 0{,}45 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}0188 \approx 1{,}20 \cdot 10^{-5}\, V$

Detta kan också fås genom att mata in flödesfunktionen i Geogebra, och derivera numeriskt:

Kommandot ”Grundpotensform” används för att visa det svar som ser ut att vara ”a = 0” i en mer rättvis form.

Med spänningen känd återstår att hitta strömmen.
Den ges med Ohms lag som:

$I = \frac{e}{R}$

Resistansen vid tiden 5 sekunder, ges av omkretsen i centimeter gånger 5 (då det var 5 Ω/cm)

Omkretsen är då $2 \cdot \pi \cdot r(5) = 94{,}25\, cm$

Resistansen blir därför $R = 94{,}25 \cdot 5 = 471{,}2\, \Omega$

Och slutligen, den efterfrågade strömmen blir:

$I = \frac{1{,}20 \cdot 10^{-5}}{471{,}2} \approx 2{,}55 \cdot 10^{-8}\, A = 25{,}5\, nA$

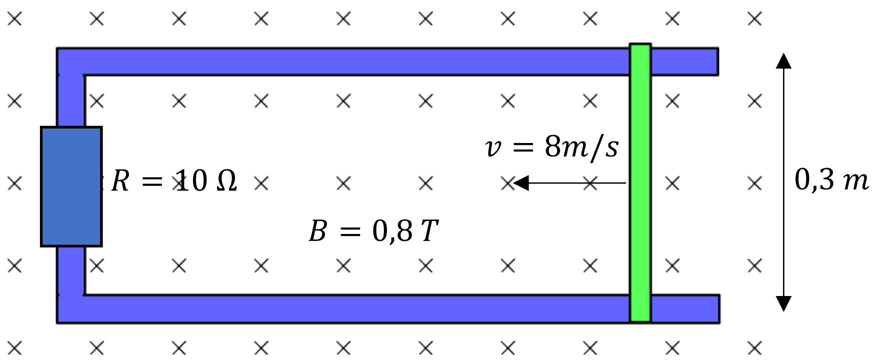
(en jätteliten ström)

2. Figuren visar ett U-format metallspår som befinner sig horisontellt i ett magnetfält. Magnetfältet är riktat vinkelrätt mot det U-formade spåret, och har storleken $B = 0{,}8\ T$

På spåret skickas en metallstav in med hastigheten $8\ m/s$.

Staven har massan $1{,}6\ kg$ och påverkas under rörelsen av en friktionskraft med friktionstalet $\mu = 0{,}03$.

Anta att resistansen i spåret är konstant $10\ \Omega$



a) Hur stor är accelerationen i det ögonblick som figuren visar?

Accelerationen ges av Newtons andra lag, dvs $a = \frac{F_{res}}{m}$

I detta fall är den resulterande kraften bestående av två delar, dels ”BIL”-kraften, som orsakas av den inducerade strömmen, och dels friktionskraften, dvs

$F_f = \mu \cdot m \cdot g$

$F_B = B \cdot I \cdot l$

Strömmen beror dock enligt Ohms lag på spänningen och resistansen, dvs $I = \frac{e}{R}$

Det gör att F_B kan skrivas:

$F_B = B \cdot \frac{e}{R} \cdot l$

Spänningen beror enligt generatorformeln på hastigheten enligt, $e = v \cdot B \cdot l$

F_B kan därför skrivas:

$F_B = B \cdot \frac{v \cdot B \cdot l}{R} \cdot l$

Och den resulterande kraften blir:

$F_{res} = F_B + F_f = B \cdot \frac{v \cdot B \cdot l}{R} \cdot l + \mu \cdot m \cdot g$

Med insatta värden ger detta,

$F_{res} = 0{,}8 \cdot \frac{8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3}{10} \cdot 0{,}3 + 0{,}03 \cdot 1{,}6 \cdot 9{,}82 = 0{,}04608 + 0{,}47136 \approx 0{,}52\ N$

Det ger accelerationen till $a = \frac{F_{res}}{m} \approx \frac{-0{,}52}{1{,}6} \approx -0{,}32\ m/s^2$ (OBS!! En bromsande acceleration)

b) Axe Leration säger att han med svaret i a) kan bestämma bromssträckan som staven får.

Bestäm denna bromssträcka.

Om accelerationen antas vara konstant kan antingen energiresonemang eller rörelseformlerna användas för att bestämma bromssträckan.

Klart snabbast är via energiresonemang:

$W_k = F_{res} \cdot s$

$\frac{mv^2}{2} = F_{res} \cdot s$

Det ger $s = \frac{mv^2}{2 \cdot F_{res}} \approx \frac{1{,}6 \cdot 8^2}{2 \cdot 0{,}52} \approx 98{,}95\ m$

Rörelseformlerna:

Tiden blir:

$v = 0 => v_0 + at = 0$

$t = \frac{v_0}{-a} = \frac{8}{0{,}3234} \approx 24{,}73\ s$

Sträckan blir då:

$s = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2} \approx 8 \cdot 24{,}73 - \frac{0{,}3234 \cdot 24{,}73^2}{2} \approx 98{,}95\ m$

c) Axe tittar på sitt svar i b) och säger:
- *"Det är alldeles för mycket! Det kan inte stämma!"*

Axe har rätt i att hans svar inte stämmer, men i själva verket är svaret för litet.
Förklara varför.

Accelerationen är INTE konstant. Den beror på hastigheten.
Då hastigheten är som störst i början kommer accelerationen vara som störst i början.
Det är dock inte så mycket som skiljer då största delen av den resulterande kraften i detta fall utgörs av friktionen, och den är i denna modell oberoende av hastigheten.

Iaf, eftersom Axes resonemang utgår från en större bromsande acceleration än vad som gäller kommer bromssträckan i hans beräkning att bli för liten.

För att hitta den verkliga bromssträckan behöver dock en differentialekvation lösas
(eftersom kraften beror av v, och accelerationen är v')